5309

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 131.

In vier Heften.

Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1906.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 131.

Bauer, M., Über die arithmetische Reihe . . . . . Seite 265

Bohl, P., Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie . . . . . — 268

Busche, E., Über Gitterpunkte in der Ebene . . . . . — 113

Ermakoff, W., Équations différentielles du premier ordre ayant des multiplicateurs de la forme $(y-u_1)^{a_1}(y-u_2)^{a_2}\dots(y-u_n)^{a_n}$ . . . . . — 56

Farkas, J., Beiträge zu den Grundlagen der analytischen Mechanik . . . — 165

Fejér, L., Über Stabilität und Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel . . . . . — 216

Gundelfinger, S., Drei Briefe von *C. F. Gauß* an *Joh. von Müller* . . . — 1

Horn, J., Bewegungen in der Nähe einer Gleichgewichtslage . . . . . — 224

Knoblauch, J., Die Biegungs-Invarianten und Kovarianten von gegebener Ordnung . . . . . — 247

Landsberg, G., Bemerkungen zur Theorie der algebraischen Kurven . . . — 152

Mandl, M., Über die Zerlegung von Funktionen mehrerer Variabeln in irreduktible Faktoren . . . . . — 40

Mertens, F., Über zyklische Gleichungen . . . . . — 87

Rados, G., Die Diskriminante der allgemeinen Kreisteilungsgleichung . . . — 49

Schlesinger, L., Zur Theorie der homogenen linearen Differentialsysteme . — 202

Schwering, K., Anwendung der elliptischen Funktionen auf eine geometrische Aufgabe . . . . . — 25

Stéphanos, C., Sur les forces donnant lieu à des trajectoires coniques . . — 136

Teixeira, F. Gomes, Sur quelques applications des séries ordonnées suivant les puissances du sinus . . . . . — 74

Thomé, L. W., Über simultane lineare Differentialgleichungen . . . . . — 8

158143

Drei Briefe von *C. F. Gauss* an *Joh. von Müller.*

Herausgegeben von Herrn *S. Gundelfinger* in Darmstadt.

Die folgenden drei Briefe*) von *C. F. Gauß* (aus dem Jahre 1808) an den berühmten Geschichtsschreiber *Joh. v. Müller*, den damaligen Generaldirektor des Unterrichts für das neue Königreich Westphalen, bieten so viel des Interessanten, daß ihr Abdruck in mehr als einer Beziehung gerechtfertigt erscheint. Namentlich der erste, zugunsten *Bessels* geschriebene Brief zeigt *Gauß* in seinem Eifer für die Wissenschaft von der liebenswürdigsten Seite und ergänzt seine Verwendungen für junge aufstrebende Genies, wie *Abel*, *Dirichlet*, *Jacobi*, *Eisenstein* und andere in schönster Weise.

Darmstadt, 10. IX. 1905.

S. Gundelfinger.

1.

An dem Tage, wo mir das Glück zu Theil ward, Ewer Exzellenz meine unbegrenzte Verehrung zu bezeigen, eröffneten Sie mir die frohe Aussicht, daß alle meine auf das Beste der Wissenschaft, die das Glück meines Lebens ausmacht, abzweckenden Wünsche, stets bei Ihnen warme Theilnahme und kräftige Unterstützung finden werden. Eine Gelegenheit, dieser Wissenschaft einen großen, einen *sehr* großen Dienst zu leisten, bietet sich jetzt dar. Vertrauensvoll nahe ich mich der edlen Stütze deutschen Geistes-

*) Der Abdruck ist durch die Güte des Vorstandes der Stadtbibliothek zu Schaffhausen, wo sich die Originale befinden, ermöglicht.

werthes mit einer Bitte, nicht für mich, nicht von persönlichen Rücksichten, sondern einzig vom reinsten Eifer für die Wissenschaft veranlaßt, mit einer Bitte, deren Erfüllung mir so theuer seyn wird, als das Gelingen der glänzendsten Entdeckung.

Deutschland besitzt einen jungen Mann, dessen höchst ausgezeichnete Talente für die mathematischen und astronomischen Wissenschaften zwar dem größern Publikum nicht sehr bekannt sind — um dessen Beifall pflegen sich solche Köpfe nicht zu bewerben — wol aber den Kennern. Schon haben wir mehrere Proben davon, Arbeiten, von denen ich mit ebenso viel Vergnügen, als inniger Überzeugung erkläre, daß keiner der ersten heutigen Geometer und Astronomen sich ihrer als eigner Arbeiten schämen würde. Ich selbst habe vor einem Jahre dieses junge Genie persönlich kennen gelernt, und bin gewiß, daß er einer der vornehmsten Stammhalter der erhabenen Wissenschaft, eine Zierde in den Annalen unseres Jahrhunderts seyn wird. Es ist Herr *Friedrich Wilhelm Bessel,* jetzt Inspektor der Schröterschen einst nach Göttingen kommenden Instrumente in Lilienthal bei Bremen. Und dieses seltene Talent, dessen gleichen jedes Jahrhundert nur wenige hervorzubringen sich gefällt, und welches sich jetzt in einer seiner noch weiteren Entwickelung sehr günstigen Lage befindet, ist jetzt in Gefahr, aus dieser Sphäre gewaltsam gerissen zu werden: die Urania ist in Gefahr einen ihrer würdigsten Lieblinge zu verlieren.

Herr *Bessel* ist Sohn des ehemaligen Justizrathes *Bessel,* jetzt ersten Greffier beim Tribunal in Minden im Weserdepartement, und jetzt erst im 24. Jahre, also dem Buchstaben der Gesetze zufolge der Conskription unterworfen. Also gerade der Umstand, welcher die einem solchen Talente gebührende Achtung noch erhöhet, sollte die Ursache seiner Hemmung werden! Der Genius der Wissenschaften möge es verhüten! Mit der größten Bestürzung habe ich heute die Nachricht von dieser drohenden Gefahr erhalten: nur die Hoffnung, daß sie durch unsern großherzigen Vertreter werde abgewandt werden können, vermag mich zu beruhigen.

In der That, wenn ein *Bessel* von der Conskription eximirt wird, so ist dies kaum als eine Ausnahme anzusehen. Denn dreist kann man die ganze Westphälische Jugend aufrufen und fragen, wie viele von Euch können sich mit einem *Bessel* in Eine Kategorie setzen?

Man hat eine Auskunft gefunden, um die geschicktesten Arbeiter bei den Salinen und Bergwerken ihren Beschäftigungen zu erhalten. Sollte die

Astronomie, die etwas noch edleres als Salz und Gold zu Tage fördert, vergebens um *Eine* ähnliche Begünstigung bitten: Die Astronomie selbst sage ich, denn ich bin gewiß, daß alle Astronomen Europens, die *Bessels* Werth kennen, ihre Bitte mit der meinigen vereinigen würden, wenn sie die Gefahr kennen, in der *Bessel* schwebt.

Welch eine Ermunterung für die Verehrer der Wissenschaft würde es seyn, wenn diese dringenden Gründe hinreichten, ein so ausgezeichnetes Verdienst seiner Bestimmung zu erhalten. Bei Herrn *Bessel* kommt noch der Umstand hinzu, daß er als (besoldeter) Inspektor der Göttingen angehörenden und nur auf Lebenszeit bei ihrem bisherigen Besitzer bleibenden Instrumente gewissermaßen als eine in K. Westphälischem Dienste stehende Person betrachtet werden muß.

Mit dem heißen Wunsche, bald über diese wichtige Angelegenheit einige Beruhigung zu erhalten, verharre ich mit unbegrenzter Ehrfurcht

Ewer Exzellenz

unterthänigster Diener

Göttingen, den 15. Julius 1808.*) Carl Friedrich Gauß.

N. S. Dürfen wir uns wol bald Hoffnung machen, uns im Besitz der uns von der Huld Sr. K. Maj. geschenkten Instrumente zu sehen.

2.

Ewer Exzellenz

haben in einem vor einigen Wochen an den Herrn Prorektor der hiesigen Universität erlassenen Rescript befohlen, daß diejenigen hiesigen Professoren, die noch mit dem Antrittsprogramme im Rückstande sind, solches binnen einer festgesetzten Frist abfassen möchten. Da auch ich mich noch in jenem Falle befinde, so habe ich sofort geeilt, alle die Stunden, wo eine ziemlich ernsthafte Krankheit — von der ich erst jetzt mich zu erhohlen anfange, mir Arbeit erlaubte, dazu anzuwenden, einen mir zu einer solchen

*) Man vergl. zu diesem Datum „Briefwechsel zwischen *Gauß* und *Bessel*“; herausgegeben auf Veranlassung der K. Preuß. Akad. der Wissenschaften. Leipzig 1880. Brief Nr. 37.

Gelegenheitsschrift passend scheinenden Gegenstand, der auch für die Astronomen nicht ohne Interesse seyn wird, zu bearbeiten. Dieses Geschäft ist mir umso angenehmer gewesen, da ich von der Nützlichkeit dieser Sitte, welcher auch die exakten Wissenschaften manche lehrreiche und interessante Erörterung verdanken, überzeugt bin, und also schon aus wissenschaftlichem Interesse wünschen muß, daß dieselbe auch künftig stets in Ehren gehalten werden möge. Meine kleine Abhandlung ist nun bereits so weit fertig, daß sie nur noch einmal abgeschrieben werden braucht, um dem Druck übergeben werden zu können. Ich bitte also Ewer Exzellenz unterthänigst um die Erlaubniß, solche zugleich mit Anzeige meiner Vorlesungen für das Winterhalbjahr drucken zu dürfen, und dann solche als Stellvertreterin wegen des bei meinem Antritt nicht erschienenen Antritts-Programms gelten zu lassen, indem jetzt, da ich schon im dritten halben Jahre im Amte bin, der Name Antrittsprogramm nicht mehr passend seyn möchte.*)

Aus gleichem Grunde dürfte nun auch die Formalität einer lateinischen Antrittsrede nicht mehr an ihrem Platze seyn, und ich wage es, Ewer Exzellenz um Dispensation von jener unterthänigst zu bitten. Ein wichtigerer Grund indeß, der mich zu diesem Wunsche veranlaßt, ist der Umstand, daß ich, seit *langer* Zeit **ganz** aus der Übung gekommen, in der Sprache der alten Römer über etwas anderes als streng wissenschaftliche Gegenstände zu schreiben, jener nicht mächtig genug bin, um den Forderungen Genüge zu leisten, die man an den macht, der als Redner auftritt. Ich schmeichle mir, daß Ewer Exzellenz dieses freimütige Geständniß meiner Schwäche in Ansehung einer Fertigkeit nachsichtsvoll aufnehmen werden, die von dem Gegenstande meiner Beschäftigungen so sehr entfernt liegt, von der Gebrauch zu machen ich sonst nie Veranlassung habe, und welche mir zu erwerben ich eine Zeit hätte aufopfern müssen, die ich zweckmäßiger auf andere Beschäftigungen wenden zu können geglaubt hatte. — So gern man allgemein wichtige und interessante Wahrheiten in den klassischen Tönen Latiums aus dem Munde eines *Heyne* hört, und sich dadurch erwärmt fühlt, so wenig deucht mir, können solche Zwecke erreicht werden, wenn der Zuhörer stets bemerken muß, daß Mangel an Gewandtheit in der Sprache dem Gedanken Fesseln angelegt hat. Wenn also selbst die

---

*) *Gauß* spricht hier von der Abhandlung: „Methodus peculiaris elevationem poli determinandi“. Vgl. Werke VI, S. 68 ff.; S. 129 ff. und S. 141 ff.

Abfassung einer schlechten Rede mich einen großen Aufwand von meiner Zeit kosten würde, von der ich alle Mußestunden auf wissenschaftliche Arbeiten zu verwenden gewohnt bin, so hoffe ich um so eher, daß Ewer Exzellenz mich davon freisprechen werden, da Sie Selbst, wenn ich Ihr Rescript recht verstanden habe, das Programm für das Wesentlichere zu halten scheinen.

Ewer Exzellenz bin ich noch den wärmsten Dank schuldig für die Güte, womit Sie meine Verwendung für den vortrefflichen jungen Astronomen *Bessel* in Lilienthal aufgenommen haben. Wahrscheinlich wird er selbst nicht verfehlt haben, Ihnen seinen Dank dafür darzubringen und Ihnen anzuzeigen, daß das Loos ihm diesmal günstig gewesen ist.

Ich kann dieses Schreiben nicht schließen, ohne zugleich Ewer Exzellenz unsre hiesige astronomischen Anstalten zu empfehlen, und für sie um die Fortdauer der gewogenen Gesinnungen zu bitten, die Sie bei Ihrem Hiersein so gütig äußerten. In diesem Augenblicke ist es freilich der Zeitpunkt nicht, wo die Früchte von einer liberalen Begünstigung der Astronomie sich in ihrem ganzen Glanze zeigen können. Die Anzahl der jungen Männer, die sich den exakten Wissenschaften widmen, ist jetzt freilich klein, allein dies ist leicht erklärlich, der größte Theil des Auslandes ist gewissermaßen verschlossen, und die Söhne Deutschlands, wo man jetzt nur darauf denkt, die vom Krieg geschlagenen Wunden zu heilen, müssen sich meistens nur auf das Nothwendigste einschränken. Indessen auch jetzt sind doch immer einige da, die mit Erfolg in jenen Wissenschaften arbeiten; auch jetzt haben wir schon Proben, die zeigen, wie in Zukunft bei bessern Zeiten die Astronomie zu Göttingens Glanze beitragen wird, wenn die Regierung in ihrer Unterstützung nicht ermüdet. Ich erlaube mir, *ein* solches Beispiel anzuführen. Ein junger Mann aus dem Holsteinischen, Doktor der Rechte,*) der aber diese aus unwiderstehlicher Neigung mit Mathematik und Astronomie vertauschen will, zu denen er ein bereits dokumentirtes ausgezeichnetes Talent hat, hat von der dänischen Regierung eine ansehnliche Unterstützung erhalten, um sich im Auslande dafür vollends auszubilden. Er war Willens gewesen, nach Paris zu gehen, um unter *La Lande* zu arbeiten, der ihn schon kannte und bei sich aufnehmen wollte. *La Lande* ist tot. Er glaubt jetzt,

*) *H. C. Schumacher.* Cfr. Briefwechsel zwischen *C. F. Gauß* und *H. C. Schumacher.* Herausgegeben von *C. A. F. Peters*, Bd. I, 1860, S. 4—5.

seinen Zweck am besten in Göttingen zu erreichen, und wird bald zu mir kommen. Ich weiß nicht, ob dieser junge Mann eine zu vortheilhafte Meinung von mir hat: es leidet keinen Zweifel, daß unsre alte Sternwarte mit denen in Paris von ferne keine Vergleichung verträgt: *aber ebenso gewiß bin ich*, daß, wenn die neue Sternwarte hier vollendet, und dem Plane gemäß ausgerüstet wird, wir solche Beyspiele aus allen Theilen Europens haben werden, und daß ich von meiner Seite alles thun werde, damit die, die zu uns kommen, ihre Rechnung finden.

Mit unbegrenzter Verehrung

Ewer Exzellenz

Göttingen, den 21. Oktober 1808. unterthänigster Diener

C. F. Gauß.

3.

Indem ich Ewer Exzellenz für Ihr gütiges Schreiben und die Freisprechung von der lateinischen Antritts-Rede meinen unterthänigen Dank abstatte, eile ich zugleich, Ihnen das vor einigen Tagen aus der Presse gekommene Programm vorzulegen. Da der darin abgehandelte Gegenstand sich auf eine Aufgabe bezieht, von der besonders in der nautischen Astronomie mit Nutzen Gebrauch gemacht werden kann, und S. Königl. Majestät vielleicht an dieser noch ein besonderes Interesse nehmen, so würde ich es wagen, Ewer Exzellenz zu bitten, das eine Exemplar Namens meiner Sr. Majestät zu Füßen zu legen, wenn ich wüßte, daß dies nicht unschicklich wäre.

Die Hoffnung, die Ewer Exzellenz mir in Ansehung der Fortsetzung des neuen Baues der Sternwarte geben, hat meinen Muth neubelebt: allerdings würde es höchst unzweckmäßig seyn, auf die Anschaffung von solchen Instrumenten, die wir ohnehin einst aus Lilienthal zu erwarten haben, Kosten zu verwenden. Ich hoffe in Kurzem im Stande zu seyn, Ihnen nebst der Übersicht des Brauchbarsten, was wir schon hier haben, zugleich ein Verzeichniß dessen zu schicken, was wir einst von Lilienthal bekommen. Unsre Universität hat zwar kein Inventarium, ja so viel ich weiß auch nichts Schriftliches über den Schenkungsakt aufzuweisen, gewiß aber müssen diese Urkunden sich in Hannover befinden, und es wird nicht

schwer seyn, von Kassel aus dieselben zu erhalten, falls man dies für nöthig halten sollte. Ein vollständiges Verzeichniß der Instrumente hoffe ich indeß, wie gesagt, doch bald Ihnen vorlegen zu können.

Ewer Exzellenz Theilnahme an meinem Gesundheitszustande hat mir sehr wol gethan; ich bin jetzt ziemlich wiederhergestellt.

Mit der innigsten Verehrung

Ewer Exzellenz

unterthänigster Diener

C. F. Gauß.

Über simultane lineare Differentialgleichungen.

Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.

Nachdem von dem Verfasser in einer Reihe von Abhandlungen in diesem Journal die einzelne lineare Differentialgleichung, besonders diejenige mit ein- oder mehrwertigen algebraischen Koeffizienten behandelt worden ist, werden in dieser Arbeit simultane lineare Differentialgleichungen untersucht.

Für die Integration der einzelnen homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Funktionen als Koeffizienten war das Vorbild die Integration der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe, wobei die Ausdrücke der Integrale aufgestellt werden, welche das Verhalten derselben in der Umgebung der singulären Punkte charakterisieren, und wobei die linearen Relationen unter den Integralen ermittelt werden, welche den Übergang derselben von einem singulären Punkte zu einem anderen ausdrücken.

Wenn in eine homogene lineare Differentialgleichung mit *gegebenen Konstanten in den rationalen Koeffizienten* eine automorphe Funktion zur Darstellung des Gesamtgebietes der unabhängigen Variabeln eingeführt wird, so entspricht dieselbe Substitution allen solchen Differentialgleichungen mit denselben singulären Punkten. Über die Natur der Exponenten der Integrale bei den singulären Punkten erhält man hierbei keinen Aufschluß. Die Darstellung eines Systems linearunabhängiger Integrale als Funktionen der unabhängigen Variabeln in der automorphen Funktion enthält die Bevorzugung eines Systems solcher Integrale vor allen anderen, die bei den singulären Punkten auftreten.

Was simultane lineare Differentialgleichungen angeht, so ist die allgemeine Form der Integrale bei einem singulären Punkte und der besondere

Fall, wenn dort die Integrale regulär sind, direkt untersucht worden von den Herren *Sauvage* (Annales de l'école normale seit 1886, Théorie générale des Systèmes d'équations diff. lin. et homog. Paris 1895); *Grünfeld* (Wiener Akad. Berichte 1888); *Königsberger* (Lehrbuch der Differentialgleichungen, 1889); *Horn* (Math. Annalen Bd. 39, 40; 1891, 1892); *Schlesinger* (dieses Journal Bd. 128; 1905).

In der vorliegenden Abhandlung wird, um reguläre und irreguläre Integrale zu behandeln, die Untersuchung von simultanen linearen Differentialgleichungen in der Richtung geführt, *daß die Integration derselben auf diejenige einer einzelnen linearen Differentialgleichung zurückkommt.*

1.

Aufstellung der simultanen homogenen linearen Differentialgleichungen.

Die simultanen Differentialgleichungen seien in der Anzahl m vorhanden und von der Form

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1(y, u, \dots z), \\ \dfrac{du}{dx} = f_2(y, u, \dots z), \\ \vdots \\ \dfrac{dz}{dx} = f_m(y, u, \dots z). \end{cases}$$

wo

$$(2.)\qquad f_r(y, u, \dots z) = a_{r1}\, y + a_{r2}\, u + \cdots + a_{rm}\, z \qquad (r = 1, \dots m)$$

ist. Die Koeffizienten a_{rs} hängen von x ab und sollen zunächst in einem einfach zusammenhängenden Gebiete von x betrachtet werden, wo dieselben einwertige und, abgesehen von einzelnen Punkten, stetige analytische Funktionen sind. Diese Koeffizienten können rationale Funktionen von x sein oder von der Form

$$(3.)\qquad \frac{H(x, s)}{K(x)},$$

wo $H(x, s)$ ein ganzer rationaler Ausdruck von x und der irreduktibeln ganzen algebraischen Funktion s ist, $K(x)$ eine ganze rationale Funktion von x.

Eine Lösung der simultanen Differentialgleichungen (1.) sei

(4.) $$y_r, u_r, \dots z_r.$$

Es gelten bei beliebigen Koeffizienten a_{rs} folgende bekannte Sätze:

Wenn m solche Lösungen vorhanden sind für $r = 1, \dots m$, daß deren Determinante nicht verschwindet — Fundamentalsystem —, so tritt jede Lösung der Differentialgleichungen unter der Form auf

(5.)
$$\begin{cases} y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m, \\ u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_m u_m, \\ \vdots \\ z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_m z_m, \end{cases}$$

wo die c Konstanten sind. Bei einem Fundamentalsystem kann ein Gleichungssystem (5.), worin die linken Seiten Null und die c Konstanten sind, die nicht alle verschwinden, nicht bestehen. Und umgekehrt, besteht in keinem Teile eines Gebietes ein solches Gleichungssystem unter den m Lösungen, so ist die Determinante nicht identisch Null. Denn wenn sonst zuerst eine r-reihige Unterdeterminante nicht identisch Null wäre, etwa die aus den r ersten Horizontal- und Vertikalreihen, so würden in einem Teile des Gebietes die Gleichungen (5.), worin die linken Seiten Null und c_{r+1} bis c_m von Null verschiedene Konstanten sind, bestehen. Durch Differentiation der r ersten Gleichungen (5.) ergibt sich dann vermittelst der r ersten Gleichungen (1.) und der Gleichungen (5.), daß auch c_1 bis c_r Konstanten sein müßten.

2.

Zusammenhang von m simultanen homogenen linearen Differentialgleichungen mit einer homogenen linearen Differentialgleichung m-ter Ordnung.

I. Aus den m simultanen Differentialgleichungen Nr. 1 (1.) folgt durch Differentiation:

(1.) $$\frac{dy}{dx} = f_1(y, u, \dots z),$$

(2.) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1(f_1, f_2, \dots f_m) = F_2(y, u, \dots z),$$

$$(3.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial F_2}{\partial x}+F_2(f_1,f_2,\dots f_m)=F_3(y,u,\dots z),$$

$$\vdots$$

$$(4.)\qquad \frac{d^my}{dx^m}=\frac{\partial F_{m-1}}{\partial x}+F_{m-1}(f_1,f_2,\dots f_m)=F_m(y,u,\dots z).$$

Nun sei

$$(5.)\qquad F_r(y,u,\dots z)=b_r y+A_{r1}u+\cdots+A_{r,m-1}z \qquad (r=1,\dots m)$$

gesetzt, wobei $F_1=f_1$. Es besteht also das Gleichungssystem

$$(6.)\qquad \frac{d^ry}{dx^r}=b_r y+A_{r1}u+\cdots+A_{r,m-1}z. \qquad (r=1,\dots m)$$

Aus demselben folgt

$$(7.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dy}{dx}-b_1y & A_{11}\dots A_{1,m-1}\\ \frac{d^2y}{dx^2}-b_2y & A_{21}\dots A_{2,m-1}\\ \vdots & \\ \frac{d^my}{dx^m}-b_my & A_{m1}\dots A_{m,m-1}\end{vmatrix}=0.$$

Jetzt wird die Voraussetzung gemacht, daß die Determinante D

$$(8.)\qquad D=\begin{vmatrix} A_{11} & \dots A_{1,m-1}\\ A_{21} & \dots A_{2,m-1}\\ \vdots & \\ A_{m-1,1}\dots & A_{m-1,m-1}\end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet.

Dann ergeben sich aus den $m-1$ ersten Gleichungen (6.) die $m-1$ Variabeln u bis z unter der Form

$$(9.)\qquad \frac{1}{D}\left\{l_{r0}y+l_{r1}\frac{dy}{dx}+\cdots+l_{r,m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right\}, \qquad (r=1,\dots m-1)$$

worin die Koeffizienten von y, $\frac{dy}{dx}$ bis $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ als Funktionen von x ausgedrückt sind. In einer beliebigen Lösung y, u, … z der Differentialgleichungen Nr. 1 (1.) ist wegen der $m-1$ ersten Gleichungen (6.) und der über D in (8.) gemachten Voraussetzung y nicht identisch Null. Jede Lösung der Differentialgleichungen Nr. 1 (1.) tritt nun unter der Form auf: y und die $m-1$ Ausdrücke (9.), wo y ein Integral der homogenen linearen Differentialgleichung m-ter Ordnung (7.) ist.

Und umgekehrt: y sei ein Integral der Differentialgleichung (7.) und die $m-1$ Funktionen u bis z seien durch die Ausdrücke (9.) oder damit gleichbedeutend durch die $m-1$ ersten Gleichungen (6.) gegeben. Dann ist wegen (7.) und (8.) auch die m-te Gleichung (6.) erfüllt. Nun folgt durch Differentiation der ersten Gleichung (6.) gemäß (2.), ferner durch Differentiation der zweiten Gleichung (6.) gemäß (3.) usw.

$$(10.)\quad \begin{cases} A_{11}\left(\frac{du}{dx}-f_2\right)+\cdots+A_{1,m-1}\left(\frac{dz}{dx}-f_m\right)=0, \\ A_{21}\left(\frac{du}{dx}-f_2\right)+\cdots+A_{2,m-1}\left(\frac{dz}{dx}-f_m\right)=0, \\ \vdots \\ A_{m-1,1}\left(\frac{du}{dx}-f_2\right)+\cdots+A_{m-1,m-1}\left(\frac{dz}{dx}-f_m\right)=0. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich die 2. bis m-te Differentialgleichung Nr. 1 (1.).

II. In I war der Ausgang von den simultanen Differentialgleichungen Nr. 1 (1.) genommen und gezeigt, daß die Integration derselben auf die der Differentialgleichung (7.) zurückkommt, vorausgesetzt, daß die Determinante D (8.) nicht identisch verschwindet. Jetzt soll unter derselben Voraussetzung der Ausgang von der Differentialgleichung (7.) aus gemacht werden. Es sollen die $m-1$ Ausdrücke (9.) oder damit gleichbedeutend die $m-1$ ersten Gleichungen (6.) gegeben sein; dann besteht auch die m-te Gleichung (6.). Und nun sollen die simultanen Differentialgleichungen Nr. 1 (1.) hergeleitet werden.

Es folgt durch Differentiation der ersten Gleichung (6.) gemäß der zweiten (6.), ferner durch Differentiation der zweiten Gleichung (6) gemäß der dritten (6.) usw.

$$(11.)\quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x}+b_1 F_1+A_{11}\frac{du}{dx}+\cdots+A_{1,m-1}\frac{dz}{dx}=F_2(y,u,\ldots z), \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}+b_2 F_1+A_{21}\frac{du}{dx}+\cdots+A_{2,m-1}\frac{dz}{dx}=F_3(y,u,\ldots z), \\ \vdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial x}+b_{m-1}F_1+A_{m-1,1}\frac{du}{dx}+\cdots+A_{m-1,m-1}\frac{dz}{dx}=F_m(y,u,\ldots z). \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich $\frac{du}{dx}$ bis $\frac{dz}{dx}$ unter der Form Nr. 1 (1.).

Und umgekehrt: Ist die erste Gleichung (6.) und sind die $m-1$ Gleichungen (11.) erfüllt, so folgen daraus gemäß (1.) bis (5.) die m Gleichungen (6.) und die Differentialgleichung (7.).

III. Der Differentialausdruck in (7.) sei auf die Form

$$(12.) \qquad (-1)^{m+1} D\left\{\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y\right\}$$

gebracht. Wenn die $(m-1)^2$ Elemente in D, die Größen A_{11} bis $A_{m-1,m-1}$, *beliebig genommen sind, sodaß D nicht identisch verschwindet, ferner die b_1 bis b_{m-1} Nr. 2 (6.) und die Koeffizienten p_1 bis p_m beliebig vorgeschrieben sind*, so sind die m Größen b_m, $A_{m,1}$ bis $A_{m,m-1}$ in (7.) eindeutig bestimmt, sodaß der Differentialausdruck in (7.) mit (12.) übereinstimmt. Der Ausdruck in (7.) zerfällt in

$$(13.) \qquad \begin{vmatrix} \frac{dy}{dx} & A_{11} & \cdots & A_{1,m-1} \\ \vdots & & & \\ \frac{d^m y}{dx^m} & A_{m,1} & \cdots & A_{m,m-1} \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} b_1 & A_{11} & \cdots & A_{1,m-1} \\ \vdots & & & \\ b_m & A_{m,1} & \cdots & A_{m,m-1} \end{vmatrix}.$$

Wird der Koeffizient von y gleich $(-1)^{m+1} D p_m$ gesetzt, so ist b_m bestimmt, nachdem $A_{m,1}$ bis $A_{m,m-1}$ bestimmt sind. Letztere Größen seien durch ϱ_1 bis ϱ_{m-1} bezeichnet. Nun ergibt sich für $(-1)^{m+1} D p_{m-\alpha}$ die Determinante

$$(14.) \qquad (-1)^{1+\alpha} \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,m-1} \\ \vdots & & \\ A_{\alpha-1,1} & \cdots & A_{\alpha-1,m-1} \\ A_{\alpha+1,1} & \cdots & A_{\alpha+1,m-1} \\ \vdots & & \\ \varrho_1 & \cdots & \varrho_{m-1} \end{vmatrix} = (-1)^m \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,m-1} \\ \vdots & & \\ A_{\alpha-1,1} & \cdots & A_{\alpha-1,m-1} \\ \varrho_1 & \cdots & \varrho_{m-1} \\ \vdots & & \\ A_{m-1,1} & \cdots & A_{m-1,m-1} \end{vmatrix},$$

In der Determinante D sei der Koeffizient von A_{ik} durch α_{ik} bezeichnet, so folgt aus (14.), daß

$$(15.) \qquad (-1)^m \{\varrho_1 \alpha_{\alpha 1} + \varrho_2 \alpha_{\alpha 2} + \cdots + \varrho_{m-1} \alpha_{\alpha, m-1}\} = (-1)^{m+1} D p_{m-\alpha}$$

wird. Die Determinante der α ist gleich D^{m-2}, daher von Null verschieden. Also ergeben sich aus (15.) die Größen ϱ_1 bis ϱ_{m-1} eindeutig.

3.

Die homogene lineare Differentialgleichung m-ter Ordnung, auf welche die m simultanen linearen Differentialgleichungen zurückkommen.

Die Integration der m simultanen linearen Differentialgleichungen Nr. 1 (1.) war auf die Integration der homogenen linearen Differentialgleichung m-ter Ordnung Nr. 2 (7.) zurückgeführt, wenn die Determinante D Nr. 2 (8.) nicht identisch verschwindet. Alsdann tritt jede der $m-1$ Funktionen u bis z unter der Form Nr. 2 (9.) auf. Ein solcher Ausdruck für u sei

$$(1.) \qquad u = \gamma_0 y + \gamma_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + \gamma_{m-1} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}.$$

Aus demselben ergibt sich durch Differentiation, indem die Ableitungen von y höherer als $(m-1)$-ter Ordnung vermittelst der Differentialgleichung Nr. 2 (7.) durch diejenigen niedrigerer Ordnungen ausgedrückt werden

$$(2.) \qquad \frac{d^r u}{dx^r} = \gamma_0^{(r)} y + \gamma_1^{(r)} \frac{dy}{dx} + \cdots + \gamma_{m-1}^{(r)} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}. \qquad (r = 1, \ldots m-1)$$

Die Determinante der Größen γ (1.) und $\gamma^{(r)}$ (2.) $(r = 1, \ldots m-1)$ sei durch $D(\gamma)$ bezeichnet. Nun werden für y m linearunabhängige Integrale der Differentialgleichung Nr. 2 (7.) genommen y_1 bis y_m, die Determinante derselben und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen sei $D(y)$. Die aus (1.) durch Einsetzen von y_1 bis y_m hervorgehenden Funktionen seien u_1 bis u_m, die Determinante derselben und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen sei $D(u)$. Es ist

$$(3.) \qquad D(u) = D(\gamma)\, D(y).$$

$D(y)$ ist nicht identisch Null. Wenn dasselbe mit $D(\gamma)$ der Fall ist, so also auch mit $D(u)$ und umgekehrt. Dann sind die Integrale u_1 bis u_m linearunabhängig. In der Differentialgleichung

$$(4.) \qquad \frac{du}{dx} = f_2(y, u, \ldots z)$$

können alsdann die Koeffizienten a_{21}, a_{23} bis a_{2m} nicht alle Null sein, das heißt, die Gleichung kann sich nicht auf $\frac{du}{dx} = a_{22} u$ reduzieren.

Aus den m simultanen Differentialgleichungen Nr. 1 (1.) sei nun in derselben Weise, wie die Differentialgleichung Nr. 2 (7.) für y entstanden ist, eine solche für u hergeleitet. Die Determinante, welche alsdann der Determinante Nr. 2 (8.) entspricht, enthält in der ersten Horizontalzeile Elemente, die nicht alle Null sind, und diese Determinante kann nicht identisch Null sein, weil sich sonst vermittelst Unterdeterminanten derselben aus den Gleichungen, welche den in Nr. 2 (6.) entsprechen, für u eine homogene lineare Differentialgleichung niedrigerer als m-ter Ordnung herleiten ließe, während m linearunabhängige Integrale u_1 bis u_m vorhanden sind.

Wenn also die Determinante $D(\gamma)$ in (3.) nicht identisch Null ist, so erhält man für u eine homogene lineare Differentialgleichung m-ter Ordnung entsprechend derjenigen, die in Nr. 2 für y hergeleitet ist.

Die Differentialgleichung für u, welche auf dem Zusammenhang von u mit y (1.), (2.) beruht, wenn $D(\gamma)$ nicht identisch verschwindet, ist in der Abhandlung des Verfassers Bd. 122 dieses Journals Nr. 2 näher untersucht. Die Koeffizienten a_{r1} in den simultanen Differentialgleichungen Nr. 1 (1.) seien rationale Ausdrücke von x oder algebraische der Form Nr. 1 (3.). Dann ergibt sich aus Nr. 2 (9.), daß die Koeffizienten γ in (1.) auch Ausdrücke derselben Art sind. Der Differentialausdruck für y in Nr. 2 (7.) sei auf die Form gebracht, daß der Koeffizient der höchsten Ableitung gleich 1 ist, alsdann durch $F_m(y, x)$ bezeichnet, ebenso sei der Differentialausdruck für u auf eine solche Form gebracht und durch $G_m(u, x)$ bezeichnet.

Die Koeffizienten a_{r1} in Nr. 1 (1.) seien rational. Nun besteht gemäß Abhandlung Bd. 122 dieses Journals Nr. 2, IV zwischen $F_m(y, x)$ und $G_m(u, x)$ folgende Beziehung:

Ist $F_m(y, x)$ ein regulärer Differentialausdruck, so auch $G_m(u, x)$, und ist der eine Ausdruck ein normaler, so auch der andere mit demselben determinierenden Faktor.

Ist $F_m(y, x)$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, so auch $G_m(u, x)$ durch ein solches System, welches ebenso viele Bestandteile wie das erste hat, und worin jeder Bestandteil dieselbe Ordnung und denselben determinierenden Faktor hat, wie der Bestandteil, der in dem System von $F_m(y, x)$ an derselben Stelle steht.*)

*) Bemerkung: Der in diesem Journal Bd. 124, S. 117 von Herrn *Landau* angegebene Satz über Zerlegung eines homogenen linearen Differentialausdruckes ist, wenn die Koeffizienten ein- oder mehrwertige algebraische Funktionen sind, in einem allge-

Die Koeffizienten a_{rs} mögen die algebraische Funktion s enthalten Nr. 1 (3.). Dann gilt die der vorhin genannten Beziehung entsprechende zwischen $F_m(y, x)$ und $G_m(u, x)$, wenn $F_m(y, x)$ durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke darstellbar ist (Abhandlung Bd. 122 S. 20 dieses Journals) und auch wenn $F_m(y, x)$ durch ein System verallgemeinerter im Bereiche s normaler Differentialausdrücke sich darstellt (Abhandlung Bd. 123 S. 86 dieses Journals).

4.

Die Integrale der simultanen homogenen linearen Differentialgleichungen.

I. Unter der Voraussetzung, daß die Determinante D Nr. 2 (8.) nicht identisch verschwindet, waren nach Nr. 2 die vollständigen Integrale y, u bis z der simultanen Differentialgleichungen Nr. 1 (1.) gegeben durch y und die $m-1$ Ausdrücke Nr. 2 (9.), wo y das vollständige Integral der homogenen linearen Differentialgleichung m-ter Ordnung Nr. 2 (7) ist.

m linearunabhängige Integrale von Nr. 2 (7.) seien y_1, y_2 bis y_m. Die aus Nr. 2 (9.) für u bis z hervorgehenden Funktionen seien bezüglich u_1, u_2 bis u_m usw. z_1, z_2 bis z_m. Die Determinante dieser m^2 Funktionen verschwindet alsdann nach Nr. 1 nicht identisch. Ferner ergibt sich aus Nr. 2, daß diese Determinante gleich ist der Determinante der Funktionen y_1, y_2 bis y_m und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen, — dieselbe sei durch $D(y)$ bezeichnet, — multipliziert mit der Größe

$$(1.) \qquad \begin{vmatrix} l_{11} & \dots l_{1,\,m-1} \\ \vdots & \\ l_{m-1,1} & \dots l_{m-1,\,m-1} \end{vmatrix} \frac{1}{D^{m-1}}.$$

Letztere ist gemäß den $m-1$ ersten Gleichungen Nr. 2 (6.) gleich $\frac{1}{D}$. Also ist die Determinante Δ des Fundamentalsystems

$$(2.) \qquad \Delta = \frac{D(y)}{D}.$$

---

meineren Satze enthalten, welcher für den Fall, daß der Differentialausdruck durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, in der Abhandlung des Verfassers Bd. 96 S. 221 dieses Journals bewiesen ist; dieser Beweis gilt aber allgemein. (Vergleiche Bd. 117 S. 206, Bd. 123 S. 84).

II. A) Die Koeffizienten a_{rs} in Nr. 1 (1.) seien in einem einfach zusammenhängenden Bereiche von x einwertige und stetige analytische Funktionen. Nach dem Fundamentalsatze von *Cauchy* gibt es dann bei jedem Punkte a im Innern dieses Gebietes ein und nur ein System von Integralen y, u bis z, welche in einem Bereiche um a einwertige und stetige analytische Funktionen sind, und für $x = a$ vorgeschriebene Werte annehmen. Indem man bei m solchen Systemen die Determinante der Anfangswerte von Null verschieden annimmt, erhält man ein Fundamentalsystem. Wenn man für zwei in einander greifende Gebiete von x je ein Fundamentalsystem hat, so kann man in einem Punkte des gemeinsamen Gebietes, in dem die Determinante des Fundamentalsystems II nicht verschwindet, m konstante Koeffizienten in den linearen Verbindungen der Funktionen dieses Systems so bestimmen, daß bezüglich die Werte der Funktionen y bis z des Systems I erhalten werden, woraus die Fortsetzung dieser Funktionen hervorgeht. Es ergibt sich auf diese Weise bekanntlich der Grundsatz, daß innerhalb eines Kreises, in welchem die Koeffizienten a_{rs} in Nr. 1 (1.) einwertige und stetige analytische Funktionen sind, es ein und nur ein System von Integralen y, u bis z der simultanen Differentialgleichungen gibt, welche in dem Mittelpunkt vorgeschriebene Werte annehmen und innerhalb des ganzen Kreises einwertige und stetige analytische Funktionen sind. Das Entsprechende gilt für simultane nichthomogene lineare Differentialgleichungen.

B) Die Koeffizienten a_{rs} in Nr. 1 (1.) seien nun rationale Funktionen von x oder mögen die irreduktibele algebraische Funktion s enthalten unter der Form Nr. 1 (3.). Singuläre Punkte im Endlichen sind die Stellen, in welchen die rationalen Funktionen a_{rs} unendlich werden; bei den reduzierten Ausdrücken Nr. 1 (3.) die Stellen, in denen die Nenner verschwinden, und die Punkte, in denen die Diskriminante von s gleich Null wird.

Die Differentialgleichung Nr. 2 (7.) sei auf die Form gebracht, daß der Koeffizient der höchsten Ableitung gleich 1 ist. Deren singuläre Punkte im Endlichen sind dann die Punkte, in denen die rationalen Koeffizienten unendlich werden, bezüglich wenn die Koeffizienten die algebraische Funktion s unter der Form Nr. 1 (3.) enthalten, diejenigen, in denen die Nenner verschwinden und in denen die Diskriminante von s gleich Null wird.

Wenn nun in dieser Differentialgleichung Nr. 2 (7.) noch andere singuläre Punkte im Endlichen vorkommen, als in den simultanen Differentialgleichungen Nr. 1 (1.), so können dieselben nach dem in A) angegebenen

Grundsatze nur außerwesentliche sein. Und umgekehrt, wenn in den simultanen Differentialgleichungen andere singuläre Punkte im Endlichen vorkommen, als in der Differentialgleichung Nr. 2 (7.) und in den Koeffizienten von y und seinen Ableitungen in den Ausdrücken Nr. 2 (9.), so sind dieselben in den simultanen Differentialgleichungen außerwesentlich. —

In einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten oder solchen, die Ausdrücke der Form Nr. 1 (3.) haben, seien bei zwei singulären Punkten a und b die Integrale regulär („niedere singuläre Punkte"), a liege im Innern, b auf der Peripherie eines Kreises, außerdem sei kein singulärer Punkt im Innern oder auf der Peripherie. Alsdann waren die konstanten Koeffizienten, welche in den Ausdruck eines Integrales bei a durch lineare Verbindung der Integrale bei b eingehen, nach Abh. Bd. 87 Nr. 4, 10 (vergl. Abh. Bd. 96 S. 260), Bd. 115 Nr. 5, IV dieses Journals durch spezielle Ausdrücke hergestellt. Diese Untersuchungen bleiben unverändert, wenn außer den niederen singulären Punkten a und b noch außerwesentliche singuläre Punkte in dem Kreise oder auf der Peripherie desselben vorkommen.

III. Die Herstellung der Integrale der simultanen Differentialgleichungen bei den singulären Punkten, der Umgang der Integrale um einen singulären Punkt, der Übergang von einem singulären Punkt zu einem andern und die allgemeine Fortsetzung, sowie die Wertberechnung der Integrale mit vorgeschriebener Annäherung kommt nun auf das Entsprechende bei den Integralen der Differentialgleichung Nr. 2 (7.) zurück, welche in die Ausdrücke Nr. 2 (9.) einzusetzen sind. Hierdurch gehen die Substitutionen hervor.

5.

Die simultanen nichthomogenen linearen Differentialgleichungen.

Es seien m simultane nichthomogene lineare Differentialgleichungen aufgestellt

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1(y, u, \dots z) + X_1, \\ \dfrac{du}{dx} = f_2(y, u, \dots z) + X_2, \\ \vdots \\ \dfrac{dz}{dx} = f_m(y, u, \dots z) + X_m, \end{cases}$$

wo $f_r\ (y, u, \dots z)\ (r=1, \dots m)$ der Ausdruck Nr. 1 (2.) ist. Die Größen $X_r (r=1, \dots m)$ sollen solche sein, wie in Nr. 1 der Abhandlung des Verfassers Bd. 107 dieses Journals über nichthomogene lineare Differentialgleichungen in bezug auf den zweiten Teil einer solchen Differentialgleichung vorausgesetzt ist. Die Koeffizienten a_{rs} in den f seien rationale Funktionen von x oder sollen rational x und die irreduktibele algebraische Funktion s enthalten Nr. 1 (3.). In letzterem Falle wird auf die allgemeinen Betrachtungen in Abh. Bd. 115 Nr. 3 und 4 Bezug genommen.

I. A) Ein Fundamentalsystem von Lösungen der simultanen homogenen Differentialgleichungen Nr. 1 (1.) sei nach den Angaben von Nr. 2 aufgestellt:

$$(2.)\qquad \begin{cases} y_1, y_2, \dots y_m, \\ u_1, u_2, \dots u_m, \\ \vdots \\ z_1, z_2, \dots z_m. \end{cases}$$

Die Determinante desselben Δ ist nach Nr. 4 (2.)

$$(3.)\qquad \Delta = \frac{D(y)}{D},\ D(y) = e^{-\int p_1 dx},$$

wo p_1 der Koeffizient von $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ in der Differentialgleichung Nr. 2 (7.) ist, welche mit $\frac{(-1)^{m+1}}{D}$ multipliziert sein soll.

Nach der Methode der Variation der Konstanten erhält man dann die Integration der nichthomogenen linearen Differentialgleichungen (1.) bekanntlich in folgender Weise. Es wird

$$(4.)\qquad \begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m, \\ u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_m u_m, \\ \vdots \\ z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_m z_m \end{cases}$$

angesetzt. Hieraus folgt

$$(5.)\qquad \begin{cases} \frac{dC_1}{dx} y_1 + \dots + \frac{dC_m}{dx} y_m = X_1, \\ \vdots \\ \frac{dC_1}{dx} z_1 + \dots + \frac{dC_m}{dx} z_m = X_m, \end{cases}$$

$$(6.)\qquad \frac{dC_r}{dx}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} y_1 \dots y_{r-1} & X_1 & y_{r+1} \dots y_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1 \dots z_{r-1} & X_m & z_{r+1} \dots z_m \end{vmatrix}$$

und

$$(7.)\qquad C_r=\int \frac{dC_r}{dx}\,dx+k_r,$$

wo k_r eine Konstante. Es werde bei $\varepsilon_\alpha=0$ $(\alpha \gtrless i)$, $\varepsilon_i=1$,

$$(8.)\qquad \begin{vmatrix} y_1 \dots y_{r-1} & \varepsilon_1 & y_{r+1} \dots y_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \varepsilon_i & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1 \dots z_{r-1} & \varepsilon_m & z_{r+1} \dots z_m \end{vmatrix}=L_{ir}$$

gesetzt. Dann ergeben sich folgende Integrale von (1.), zu welchen die Ausdrücke (4.), in denen die Konstanten k an Stelle der C stehen, zu addieren sind:

$$(9.)\qquad \begin{cases} y=\sum_{i=1}^{m}\left\{y_1\int\frac{L_{i1}X_i}{\Delta}dx+\dots+y_m\int\frac{L_{im}}{\Delta}X_i\,dx\right\}, \\ u=\sum_{i=1}^{m}\left\{u_1\int\frac{L_{i1}X_i}{\Delta}dx+\dots+u_m\int\frac{L_{im}}{\Delta}X_i\,dx\right\}, \\ \vdots \\ z=\sum_{i=1}^{m}\left\{z_1\int\frac{L_{i1}X_i}{\Delta}dx+\dots+z_m\int\frac{L_{im}}{\Delta}X_i\,dx\right\}. \end{cases}$$

Wird ein Summand in X_i herausgenommen und werden die übrigen X gleich Null gesetzt, so erhält man zu den bezüglichen Differentialgleichungen (1.) durch (9.) Integrale. Jede der Größen X setzt sich nach den gemachten Voraussetzungen bei einem beliebigen Punkte x_0 aus einer endlichen Anzahl Funktionen q homogen und linear mit konstanten Koeffizienten zusammen, von denen die einzelne Funktion q einen Ausdruck von der Form eines Integrales einer homogenen linearen Differentialgleichung hat mit Koeffizienten, die in der Umgebung dieses Punktes, abgesehen von demselben, einwertige und stetige analytische Funktionen sind, und bei welchem Integrale die Exponenten in den Potenzreihen in der Entwicklung sich nur um ganze Zahlen unterscheiden. Durch Umgang um x_0 geht die einzelne Funktion q in eine homogene lineare Verbindung mit konstanten Koeffizienten von den Funktionen q über.

B) Die Koeffizienten a_{rs} in den f_r Nr. 1 (2.) seien rationale Funktionen von x.

Die Entwicklung der Integrale (9.) bei einem Punkte x_0 und der Umgang der Integrale um diesen Punkt erfolgt nach den Angaben in Abh. Bd. 121 Nr. 8, II dieses Journals. Bei dem Übergange von einem Punkte zu einem anderen werden die Integrale bei dem einen Punkte ausgedrückt durch die Integrale (9.) bei dem anderen, zu welchen die Ausdrücke (4.), in denen die C Konstanten sind, hinzutreten. Diese Konstanten sind durch Auflösen des linearen Gleichungssystems, dessen Determinante durch (3.) gegeben ist, zu bestimmen. Entsprechend ist es, wenn dabei für x eine lineare Substitution $x = f(\xi)$ eintritt, durch welche für die bei beiden Punkten aufgestellten Integralsysteme ein gemeinsames Gebiet der unabhängigen Variablen hergestellt wird (Abh. Bd. 96 Nr. 20, Bd. 107 Nr. 3, Bd. 115, Nr. 3, 4 dieses Journals). Die Wertberechnung der Integrale bei einem singulären Punkte und im Bezirke eines nichtsingulären Punktes erfolgt nach Abh. Bd. 107 Nr. 4 dieses Journals.

C) Die Koeffizienten a_{rs} in den f_r Nr. 1 (1.) seien rationale Ausdrücke von x und einer irreduktibelen algebraischen Funktion s Nr. 1 (3.). Dann wird nach Abh. Bd. 115 Nr. 3, 4, Bd. 121 Nr. 8, II, III dieses Journals verfahren.

α) Bei einem R-blättrigen Windungspunkte $x = a$ wird $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ gesetzt. Die Differentialgleichungen (1.) gehen dadurch über in

$$(10.) \qquad \frac{dy}{d\zeta} = (f_1 + X_1)\frac{dx}{d\zeta}, \ldots \frac{dz}{d\zeta} = (f_m + X_m)\frac{dx}{d\zeta}.$$

Die Integrale von (10.), wenn die X gleich Null sind, seien $Y_i, U_i, \ldots Z_i$ $(i = 1, \ldots m)$. Dieses sind die Integrale Nr. 2 (9.), in welchen dieselbe Substitution $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ steht. Eine Lösung der nichthomogenen Differentialgleichungen (10.) geht nun aus den Ausdrücken (9.) hervor, nachdem dort an Stelle von $y_i, u_i, \ldots z_i$ gesetzt ist $Y_i, U_i, \ldots Z_i$ und an Stelle von $X_i dx$ steht $X_i \frac{dx}{d\zeta} d\zeta$. Dabei geht der Ausdruck von Δ aus (3.) hervor, worin $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ gesetzt ist.

Die Entwicklung der Ausdrücke (9.) und der Umgang derselben um $\zeta = 0$ erfolgt nach den Angaben in Abh. Bd. 121 Nr. 8, II dieses Journals. Es ist ein einmaliger Umgang in $Y_i, U_i, \ldots Z_i$ um $\zeta = 0$, gleichbedeutend mit einem R-maligen Umgang um $x = a$ in $y_i, u_i, \ldots z_i$, vorzunehmen.

β) In die in α) genannten von ζ abhängenden Ausdrücke (9.) ist nun wieder $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}}$ einzuführen. Aus den erhaltenen Ausdrücken werden dann nach den Angaben in Abh. Bd. 115 Nr. 4 dieses Journals die Integrale von (1.) bei $x=a$ und den R Zweigen von s, sowie deren Umgang um $x=a$ hergestellt. Der Übergang von einem Punkte zu einem anderen wird entsprechend den Angaben in B) vorgenommen; ebenso die Wertberechnung (vergl. Abh. Bd. 121 dieses Journals Nr. 8, III).

II. Die Integration der m simultanen nichthomogenen linearen Differentialgleichungen (1.) kann aber auch nach dem Verfahren in Nr. 2 auf die Integration einer einzelnen nichthomogenen linearen Differentialgleichung m-ter Ordnung zurückgeführt werden.

Es ergibt sich durch sukzessive Differentiation unter Anwendung der Bezeichnungen in Nr. 2

$$\frac{dy}{dx} = f_1(y, u, \dots z) + X_1, \tag{13.}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = F_2(y, u, \dots z) + f_1(X_1, X_2, \dots X_m) + \frac{dX_1}{dx} \\ \quad = F_2(y, u, \dots z) + Q_2, \end{cases} \tag{14.}$$

$$\begin{cases} \frac{d^3y}{dx^3} = F_3(y, u, \dots z) + F_2(X_1, X_2, \dots X_m) + \frac{dQ_2}{dx} \\ \quad = F_3(y, u, \dots z) + Q_3, \\ \vdots \end{cases} \tag{15.}$$

$$\frac{d^my}{dx^m} = F_m(y, u, \dots z) + Q_m. \tag{16.}$$

Demnach, wenn noch $X_1 = Q_1$ gesetzt wird

$$\frac{d^ry}{dx^r} = b_r y + A_{r1} u + \cdots + A_{rm} z + Q_r. \qquad (r=1, \dots m) \tag{17.}$$

Hieraus folgt

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{dx} - b_1 y - Q_1 & A_{11} \dots A_{1,m-1} \\ \frac{d^2y}{dx^2} - b_2 y - Q_2 & A_{21} \dots A_{2,m-1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \frac{d^my}{dx^m} - b_m y - Q_m & A_{m1} \dots A_{m,m-1} \end{vmatrix} = 0, \tag{18.}$$

und es ergeben sich aus den $m-1$ ersten Gleichungen (17.) für u bis z bezüglich die Ausdrücke, welche denjenigen in Nr. 2 (9.) entsprechen,

$$(19.) \qquad \frac{1}{D}\left\{l_{r0}y + l_{r1}\left(\frac{dy}{dx} - Q_1\right) + \cdots + l_{r,\,m-1}\left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} - Q_{m-1}\right)\right\}. \qquad (r=1,\ldots m-1)$$

Es folgt ferner, wie in Nr. 2, I, daß auch umgekehrt die Funktion y aus (18.) und die Ausdrücke für u bis z (19.) die simultanen Differentialgleichungen (1.) erfüllen.

Die Differentialgleichung (18.) sei auf die Form

$$(20.) \qquad F_m(y, x) = q$$

gebracht, wo in dem homogenen linearen Differentialausdruck $F_m(y, x)$ der Koeffizient von $\frac{d^m y}{dx^m}$ gleich 1 ist. Die Ausdrücke Q_r $(r=1, \ldots m)$ und daher auch der Ausdruck q enthalten linear und homogen die X_r $(r=1, \ldots m)$ und deren Ableitungen mit Koeffizienten, die rationale Ausdrücke der a_{rs} Nr. 1 (1.) und deren Ableitungen sind. Für die Differentialquotienten der einzelnen Faktoren in endlicher Anzahl in den Summanden, aus denen sich ein X zusammensetzt zufolge der Voraussetzungen, die in Abh. Bd. 107 Nr. 1 dieses Journals gemacht sind, erhält man homogene lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten und diese Differentialgleichungen erfüllen wieder die a. a. O. vorausgesetzten Bedingungen. (Vgl. Abh. Bd. 119, S. 147 dieses Journals.) Wenn nun die Koeffizienten a_{rs} in Nr. 1 (1.) rational sind, so erfüllt q in (20.) wieder die Voraussetzungen aus Abh. Bd. 107 dieses Journals Nr. 1. Es kann also dann auch auf die Differentialgleichung (20.) das in Abh. Bd. 107 dieses Journals angegebene Verfahren, die Methode der sukzessiven Integrationen vermittelst integrierender Faktoren, angewandt werden. Durch y aus (20.) und die Ausdrücke für u bis z in (19.) werden dann die Integrale von (1.) gegeben. —

In dem Buche des Herrn *Forsyth*, Treatise on linear differential equations, London (1902), wird ein Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung mit analytischen Funktionen als Koeffizienten und dem Koeffizienten der höchsten Ableitung gleich 1 in einem einfach zusammenhängenden Gebiete, in welchem die Koeffizienten einwertig und stetig sind, ein „synektisches“ Integral genannt.

Diese Benennung entspricht dem Namen „synektische Funktion“ für eine einwertige und stetige analytische Funktion, der seit *Cauchy* vorkommt, dem Urheber der Theorie der (monogenen oder analytischen) Funktionen einer komplexen Variablen (Cours d'Analyse, Exercices d'Analyse).

Da synektische Funktionen als Integrale auch bei den außerwesentlich singulären Punkten der linearen Differentialgleichungen auftreten, so könnte man an Stelle des von Herrn *Forsyth* gewählten Namens die Benennung anwenden: Integrale in synektischem Koeffizientenbereiche.

Anwendung der elliptischen Funktionen auf eine geometrische Aufgabe.

Von Herrn *K. Schwering* in Köln.

1.

In einem Coesfelder Jahresbericht (1881) habe ich die Reihe von Kreisen untersucht, welche einem Kreisabschnitt so einbeschrieben ist, daß jeder Kreis der Reihe seine beiden Nachbarn, ferner Sehne und Bogen des Kreisabschnittes berührt. In dem erwähnten Jahresbericht habe ich die Summe der Flächeninhalte dieser dem Kreisabschnitte eingezeichneten Kreise bestimmt und durch die $\wp$-Funktion ausgedrückt. Als ich vor einiger Zeit die Aufgabe wieder in die Hand nahm, fand ich, daß es vorteilhafter ist, zunächst die Summe der Umfänge dieser Kreise zu bestimmen. Wenn man dann die Kreisreihe über die Endpunkte des Segmentes nach außen fortsetzt, erhält man andere Kreisreihen, deren Umfang und Inhalt sich sofort angeben läßt, wenn man das Argument der elliptischen Funktion um halbe Perioden vermehrt. Die Aufgabe gewinnt durch diesen Umstand die Bedeutung einer *geometrischen Darstellung des Verlaufes der $\wp$-Funktion.* Merkwürdig gestaltet sich die Entwicklung, wenn der Kreisabschnitt sich zum Halbkreise erweitert. In diesem Falle habe ich die Zahlenrechnung völlig durchgeführt. Dabei zeigte sich die ungemeine Wichtigkeit der zweckmäßigen Wahl des Periodensystems; und so ergibt sich für die bekannten theoretischen Entwicklungen (Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, Art. 45) aus unserer Aufgabe ein interessantes Beispiel. Man erhält Näherungsformeln von überaus starker Wirkung, welche zugleich die *Lösung von Grenzfällen* darstellen.

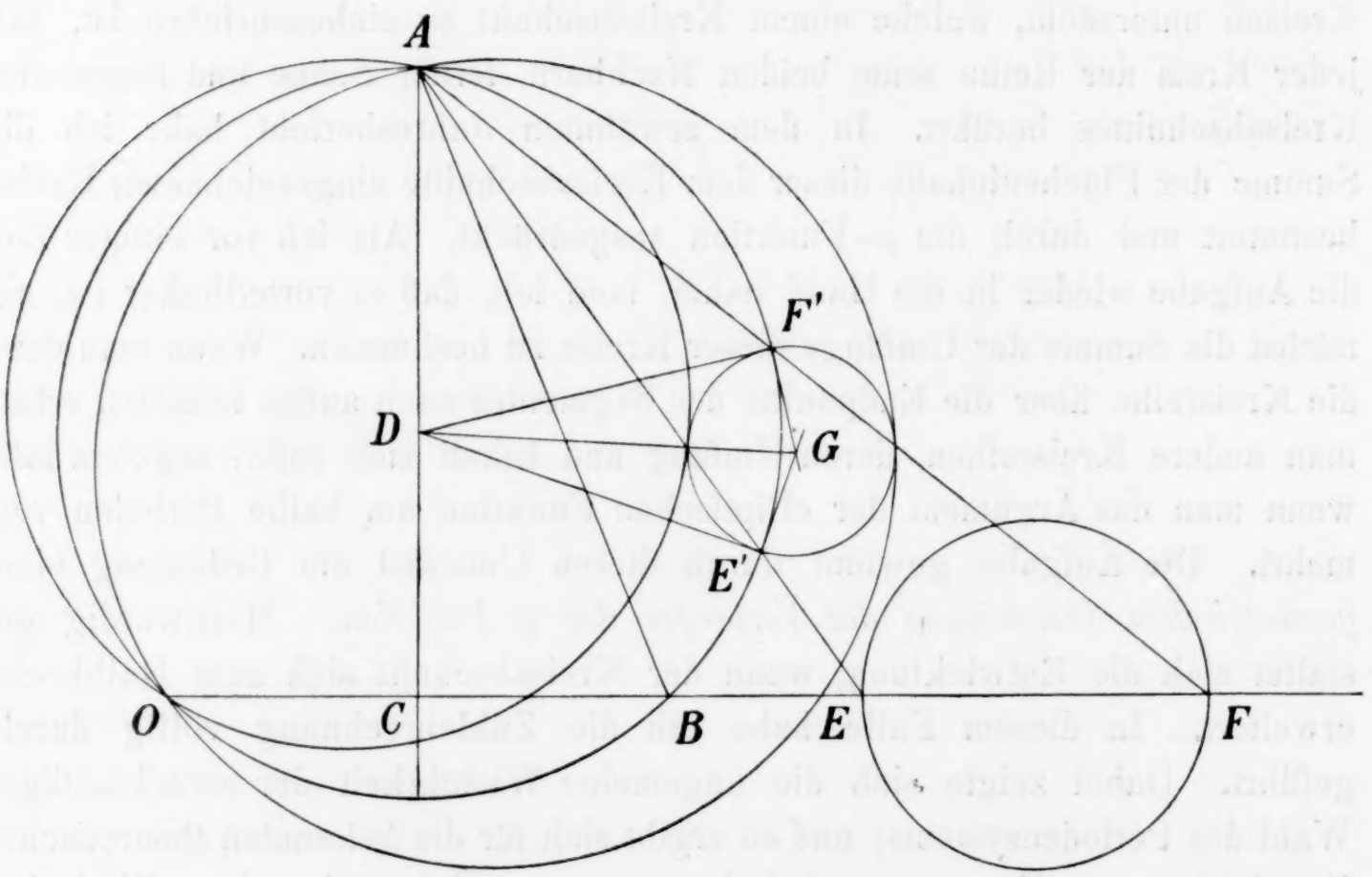
Endlich habe ich die frühere Darstellung verlassen und zunächst die allgemeine Aufgabe gelöst, welche statt des Kreisabschnittes ein Flächenstück betrachtet, welches von zwei beliebigen Kreisbogen begrenzt wird. Es ergab sich, daß dadurch die Darstellung an Übersichtlichkeit gewinnt und die Summe der Flächen aus der Summe der Umfänge durch *Ableitung nach einem Parameter* erhalten werden kann.

2.

Auf einer Geraden OB sei ein Punktsystem $K_0, K_1, K_2, \ldots$ gegeben nach folgendem Gesetze:

$$OK_0 = x_0, \quad OK_1 = px_0, \quad OK_2 = p^2 x_0, \ldots OK_n = p^n x_0.$$

Ist p eine positive Zahl, $p > 1$, so ist das Punktsystem leicht geometrisch zu verwirklichen. Wir nehmen zwei Gerade, welche sich in O unter dem Winkel γ schneiden, OB möge diesen Winkel halbieren, und nun möge



eine Reihe von Kreisen beschrieben werden, von welchen jeder die beiden Geraden und den vorhergehenden und nachfolgenden Kreis der Reihe berührt. Die gemeinsamen Berührungspunkte bilden dann die Punktreihe

$x_0, \ldots x_n$. Kreisreihe und Punktsystem setzen sich über x_0 hinaus in der Richtung auf O fort. $OK_{-1} = p^{-1} x_0, \ldots OK_{-n} = p^{-n} x_0$. Über O kann das Punktsystem vorläufig nicht fortgesetzt werden.

In der Figur auf Seite 26 sei: $AB = AO = 2a$, $OC = CB = m$, $AC = k$, $DA = r$, $m^2 + k^2 = 4a^2$, $\sphericalangle EAF = \beta$, also $E'DF' = 2\beta$, $GDE' = \beta$. $OE = p^n x_0$, $OF = p^{n+1} x_0$, $GF' = GE' = \varrho_n$.

Der Punkt A mit den kartesischen Koordinaten m, k auf O als Anfangspunkt bezogen sei nun Augenpunkt einer umgekehrten Abbildung (Inversion) mit der Potenz $4a^2$. Die Gerade OB verwandelt sich dann in den Kreis AOB, E in E', F in F' und der über EF als Durchmesser beschriebene Kreis der Reihe verwandelt sich in den Kreis um G, welcher das Bild der Geraden in den Punkten E' und F' rechtwinklig schneidet. So entsteht eine Kreisreihe, welche den Kreis OAB rechtwinklig schneidet. Jeder Kreis dieser Reihe berührt seine Nachbarn und auch zwei feste Kreise, welche sich in O und A schneiden und aus den Berührungsgeraden der ursprünglichen Kreisreihe entspringen. Man erhält diese Kreise, wenn man durch O und A die beiden Kreise legt, welche den Kreis um G berühren. In unserer Figur würde also die Kreisreihe einer Figur einbeschrieben sein, die einer schmalen Mondsichel ähnlich sieht.

Setzen wir $\sphericalangle CAF = \alpha_{n+1}$, $CAE = \alpha_n$, also $\beta = \alpha_{n+1} - \alpha_n$. Dann ist

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{p^n x_0 - m}{k}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{n+1} = \frac{p^{n+1} x_0 - m}{k}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{x_0 k (p-1) p^n}{k^2 + (p^n x_0 - m)(p^{n+1} x_0 - m)},$$

folglich

$$\varrho_n = \frac{2a^2 x_0 p^n (p-1)}{4a^2 - m x_0 p^n (p+1) + x_0^2 p^{2n+1}}.$$

Diesen Ausdruck formen wir um durch die Annahmen:

$$x_0 = 2a e^{2u}, \quad p = e^{2\delta}.$$

p ist positiv und > 1, also δ positiv, u reell, übrigens willkürlich. Es ergibt sich

$$\text{(1.)} \qquad \varrho_n = \frac{a (e^{\delta} - e^{-\delta})}{e^{2u + (2n+1)\delta} - \frac{m}{2a} (e^{\delta} + e^{-\delta}) + e^{-2u - (2n+1)\delta}}.$$

Die Mitte der Strecke EF nennen wir für einen Augenblick M. Dann ist $2ME = p^n x_0 (p-1)$, $2OM = p^n x_0 (p+1)$.

Der Quotient ist unabhängig von x_0. Nennt man den Winkel der gemeinsamen Tangenten der ursprünglichen Kreisreihe γ, so ist

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{p-1}{p+1},\quad \cos\frac{\gamma}{2}=\frac{2\sqrt{p}}{p+1},$$

also

$$\mathfrak{Cof}\ \delta=\frac{1}{2}(e^{\delta}+e^{-\delta})=\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}},\quad \mathfrak{Sin}\ \delta=\frac{1}{2}(e^{\delta}-e^{-\delta})=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Setzen wir nun $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{m}{2a}$, so finden wir die Radien r_1 und r_2 der Kreise, welche aus den Berührungsgeraden der ursprünglichen Kreisreihe durch Abbildung entspringen, $r_1\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}=a$, $r_2\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=a$,

$$r_1=\frac{2a^2(e^{\delta}+e^{-\delta})}{m(e^{\delta}-e^{-\delta})-2k},\quad r_2=\frac{2a^2(e^{\delta}+e^{-\delta})}{m(e^{\delta}-e^{-\delta})+2k}.$$

Dies sind also die Radien der festen Kreise, welche von allen Kreisen unserer Reihe berührt werden. Ist $k=m\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, so liegt A auf einer der ursprünglichen Berührungsgeraden. Die Kreisreihe berührt ein Segment; ist $k=0$, so wird $r_1=r_2$. Die festen Kreise sind gleich. Diese beiden besonderen Fälle werden uns eingehend beschäftigen.

Wir suchen jetzt zu ermitteln, für welche Werte ein Kreis der Reihe unendlich wird. Es ergibt sich die Gleichung aus (1.)

$$4a^2-mx(p+1)+px^2=0.$$

Setzen wir $x=2a\,e^{2u_0-\delta}$, so folgt

(2.) $$e^{2u_0}+e^{-2u_0}=\frac{m}{2a}(e^{\delta}+e^{-\delta}).$$

Unendlich große Kreise erhalten wir also für

$$u=\pm u_0-\frac{\delta}{2}.$$

Aus (1.) wird nun

(3.) $$\varrho_n=\frac{a(e^{\delta}-e^{-\delta})}{e^{2u+(2n+1)\delta}-(e^{2u_0}+e^{-2u_0})+e^{-2u-(2n+1)\delta}}$$

oder

(4.) $$\varrho_n=\frac{a(e^{\delta}-e^{-\delta})}{\left(e^{u+u_0+\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}-e^{-u-u_0-\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}\right)\left(e^{u-u_0\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}-e^{-u+u_0-\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}\right)}.$$

Für $u-u_0=-\frac{\delta}{2}$ wird $\varrho_0=\infty$, für $u-u_0=\frac{\delta}{2}$ wird $\varrho_{-1}=\infty$, ebenso tritt für ein beliebiges ungerades Vielfaches von $\frac{\delta}{2}$ immer ein unendlich großer Kreis auf.

Geometrisch ist dies Verhalten leicht zu verstehen. Zunächst können für reelle Kreise nur dann Entartungen eintreten, wenn ein Kreis der ursprünglichen Reihe durch den Augenpunkt A geht. Also muß A innerhalb des von der ursprünglichen Reihe erfüllten Winkelraumes γ liegen. Wie die Figur zeigt, muß also $\sphericalangle AOB=90^0-\frac{\alpha}{2}\leqq\frac{\gamma}{2}$ sein, mithin

$$\cos\frac{\gamma}{2}\leqq\sin\frac{\alpha}{2},\quad \frac{m}{2a}\geqq\frac{2}{e^{\delta}+e^{-\delta}}.$$

Ist aber dies der Fall, so ist, wie (2.) zeigt,

$$(e^{u_0}-e^{-u_0})>0,$$

woraus für e^{u_0} ein reeller und positiver Wert folgt, wenn m positiv. Geht nun irgend ein Kreis der Reihe durch A, so muß in der Reihe der Argumente

$$2u,\ 2u+2\delta,\ 2u+4\delta,\ldots.\ 2u-2\delta,\ 2u-4\delta\ldots,$$

aus welcher die Punkte der Kreisreihe $x_n=x_0p^n$ entspringen, auch das Argument $2u_0-\delta$ vorkommen. Die Argumente $u_0-\frac{\delta}{2}$ und $-u_0-\frac{\delta}{2}$, für welche Entartungen stattfinden, gehören nur ausnahmsweise zu *derselben* Kreisreihe.

3.

Verfolgen wir nun u_0 für den sich auf dem Kreise mit dem Radius $2a$ bewegenden Punkt genauer.

1. $u_0=0$. *Kreis und Sekante.*

Weil nach (2.) $\frac{m}{2a}=\cos\frac{\gamma}{2}$ ist, liegt A auf einer Berührungsgeraden der ursprünglichen Kreisreihe. Es ist:

$$\varrho_n=\frac{a\,(e^{\delta}-e^{-\delta})}{\left(e^{u+\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}-e^{-u-\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}\right)^2}. \tag{5.}$$

Die Kreise der abgeleiteten Reihe berühren eine Gerade und einen Kreis. Letzterer hat den Radius

$$r=\frac{a}{4}\,\frac{(e^{\delta}+e^{-\delta})^2}{e^{\delta}-e^{-\delta}}.$$

Man findet

$$r+\sqrt{r^2-a^2}=2a\,\frac{1}{e^{\delta}-e^{-\delta}},\quad r-\sqrt{r^2-a^2}=\frac{1}{2}a(e^{\delta}-e^{-\delta}).$$

Bemerkenswert sind besonders die Fälle $u=0$ und $u=\frac{\delta}{2}$.

Für $u=0$ wird $x=2a$. Der Kreis der ursprünglichen Reihe, welcher hierdurch bestimmt wird, schneidet die OB in den Entfernungen $x=2a$ und $2ap$. Dieser Kreis *berührt* also einen um O mit dem Radius $2a$ beschriebenen Kreis. Für $u=-\frac{\delta}{2}$ wird $x=2ae^{-\delta}$; der so bestimmte Kreis schneidet die OB in den Entfernungen $2ae^{-\delta}$ und $2ae^{\delta}$; also ist die von O an diesen Kreis gezogene Tangente von der Länge $2a$. Für $u=\frac{\delta}{2}$ stoßen wir also auf einen Kreis, welcher den um O mit $2a$ beschriebenen rechtwinklig schneidet. Dieser um O beschriebene Kreis wandelt sich in der Abbildung um in eine Gerade, welche zu OA in der Mitte senkrecht steht. Wir finden also die den Argumenten $u=0$ und $=\frac{\delta}{2}$ entsprechenden Kreise und damit die entsprechenden Kreisreihen, wenn wir die zur Mittelsenkrechten von OA berührenden oder senkrecht schneidenden Kreise der Schar bestimmen.

Für $u_0=0$ erhält man, da ein unendlich großer Kreis möglich ist, *Kreise, die einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berühren und zwar den Kreis von außen. Für $u=0$ entspringt die Reihe einem Kreise, welcher die Mittelsenkrechte berührt.* Solcher Kreise sind 2 und zwar 2 gleiche vorhanden. Die Radien ϱ_0 und ϱ_{-1} nach (5.) sind nämlich gleich.

Die Kreise sind paarweise gleich und erfüllen den Raum zwischen den größten Kreisen ϱ_0, ϱ_{-1} bis zu den spitzen Endpunkten des Segments.

Für $u=\frac{\delta}{2}$ entspringt die Reihe einem Kreise, welcher die Mittelsenkrechte senkrecht schneidet. Das ist der entartende Kreis: eine zur Sehne des Segments parallele Tangente, aber an dem vom Segment abgewandten Bogen. *Die Kreisreihe berührt Kreis und Gerade wie im Fall $u=0$, aber anfangend mit einem Kreise, dessen Durchmesser gleich der Pfeilhöhe des vom Segment abgewandten Bogens ist.*

2. $u_0=\frac{\pi i}{2}$.

Aus (3.) folgt

$$\varrho_n=\frac{a(e^{\delta}-e^{-\delta})}{\left(e^{u+\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}+e^{-u-\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}\right)^2}.$$

A liegt wieder auf einer Berührungsgeraden, aber auf der von der Kreisreihe abgewandten Seite; denn m wechselt nach (2.) sein Vorzeichen. *Die Kreisreihe berührt wieder eine Gerade und einen von ihr geschnittenen Kreis. Aber sie liegt im Innern des Segments, bildet also die Fortsetzung der* $u_0 = 0$ *entsprechenden Kreisreihen über die spitzen Enden des Segments.* Für $u = 0$ und $u = \frac{\delta}{2}$ erscheinen wieder Kreisreihen mit symmetrischer Anordnung. Für $u = 0$ berühren 2 gleiche Kreise den zur Sehne senkrechten Durchmesser, für $u = \frac{\delta}{2}$ berührt ein Kreis die Sehne in deren Mitte.

3. $u_0 = \frac{\delta}{2}$. *Fall der gleichen Kreise.*

Aus (2.) folgt $m = 2a$, also $k = 0$. A liegt auf OB. Ein unendlich großer Kreis ist möglich. Aus (4.) folgt

$$\varrho_n = \frac{a\,(e^{\delta} - e^{-\delta})}{(e^{u+(n+1)\delta} - e^{-u-(n+1)\delta})\,(e^{u+n\delta} - e^{-u-n\delta})}.$$

Daher wird ϱ_0 und ϱ_{-1} für $u = 0$ unendlich groß. *Die Kreisreihen berühren zwei gleiche Kreise gleichartig von außen;* für $u = 0$ entspringen sie den gemeinsamen Tangenten und endigen an der Spitze des beiden Kreisen gemeinsamen Stückes; für $u = \frac{\delta}{2}$ entspringen sie einem die beiden gleichen Kreise umschließenden Berührungskreise, für welchen ist

$$\varrho_{-1} = -\,a\,\frac{e^{\frac{\delta}{2}} + e^{-\frac{\delta}{2}}}{e^{\frac{\delta}{2}} - e^{-\frac{\delta}{2}}}.$$

Das Minuszeichen ist leicht zu erklären. Der Punkt A liegt *innerhalb* des Kreises der ursprünglichen Reihe, dessen Abbild der ursprüngliche Kreis ist. Man findet noch, wenn man $h = e^{-\delta}$ einführt,

$$\varrho_n = a\left(\frac{h^{2n+1}}{1 - h^{2n+1}} - \frac{h^{2n+3}}{1 - h^{2n+3}}\right).$$

4. $u_0 = \frac{\delta}{2} + \frac{\pi i}{2}$.

Es folgt aus (2.) $m = -2a$, $k = 0$.

Der Punkt A liegt auf der von der ursprünglichen Kreisreihe abgewandten Seite. Unendlich große Kreise kommen nicht vor. *Die Kreisreihen sind dem zwei gleichen sich schneidenden Kreisen gemeinsamen Flächen-*

stück eingezeichnet. Für $u=0$ berühren die Ursprungskreise den zur gemeinsamen Sehne senkrechten Durchmesser, für $u=\frac{\delta}{2}$ ist der Mittelpunkt der Sehne der Mittelpunkt des Ursprungskreises der Reihe. Es ist

$$\varrho_n = \frac{a\,(e^{\delta}-e^{-\delta})}{e^{2u+(2n+1)\delta}+e^{\delta}+e^{-\delta}+e^{-2u-(2n+1)\delta}};$$

oder

$$\varrho_n = a\left\{\frac{h^{2n}}{1+h^{2n}}-\frac{h^{2n+2}}{1+h^{2n+2}}\right\}.$$

Auf diese Kreisreihen hat kürzlich Herr *Holzmüller* in *Lampes* Archiv, Jahrgang 1904, Bd. 8, S. 87 hingewiesen und u. a. bemerkt, daß die Summe der Durchmesser gleich der gemeinsamen Sehne sein muß.

Liegt A nicht im Winkelraum der ursprünglichen Kreisreihe oder in dessen Scheitelraume, so ist kein reeller unendlich großer Kreis möglich. Wir beschränken uns hier auf die Erwähnung des einzigen Falles $u_0=\frac{\pi i}{4}$. Für diesen wird $m=0$, $k=2a$. Die Kreise der Reihen berühren zwei gleiche Kreise und zwar sind sie den nicht gemeinsamen Teilen der Flächen einbeschrieben.

4.

Wir wollen nunmehr die elliptischen Funktionen zur Bestimmung der Summen unserer Kreisreihen anwenden und zwar der Summe der Umfänge und der Flächen.

Nach (3.) erhalten wir:

$$(6.)\qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}\varrho_n = a\,(e^{\delta}-e^{-\delta})\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{e^{2u+(2n+1)\delta}-e^{2u_0}-e^{-2u_0}+e^{-2u-(2n+1)\delta}}.$$

Die Summe rechts ist, wenn man die unendlich großen Summanden ausschließt, unbedingt konvergent. Die Konvergenz ist gleich stark mit der einer geometrischen Reihe. Sie ist doppeltperiodisch mit den Perioden πi und δ. Ersteres erkennt man an jedem Summand, letzteres durch Verschiebung der Summanden. Wir setzen:

$$\omega=\frac{\pi}{2},\quad \omega'=\frac{\delta i}{2},\quad h=e^{-\delta},$$

$$\frac{u}{2\omega}=\frac{u}{\pi}=v,\quad e^{v\pi i}=e\ =z,\quad \frac{\omega'}{\omega i}=\frac{\delta}{\pi}.$$

Bildet man mit Hilfe der nach *Schwarz, Formeln und Lehrsätze*, Art. 6, 8 gegebenen Formel für σu das Produkt

$$\sigma(u+u_0)\,\sigma(u-u_0),$$

so erhält man durch Zusammenfassung geeigneter Faktoren:

$$e^{\frac{\pi i}{\omega}u}+e^{-\frac{\pi i}{\omega}u}-e^{\frac{\pi i}{\omega}u_0}-e^{-\frac{\pi i}{\omega}u_0},$$

$$1-h^{2n}e^{\frac{\pi i}{\omega}u}\left(e^{\frac{\pi i}{\omega}u_0}+e^{-\frac{\pi i}{\omega}u_0}\right)+h^{4n}e^{2u\frac{\pi i}{\omega}}.$$

Leitet man nun logarithmisch nach u_0 ab, so erhält man statt des Hauptfaktors

$$-\frac{\pi i}{\omega}\cdot\frac{e^{\frac{\pi i}{\omega}u_0}-e^{-\frac{\pi i}{\omega}u_0}}{e^{\frac{\pi i}{\omega}u-2n\delta}-\left(e^{\frac{\pi i}{\omega}u_0}+e^{-\frac{\pi i}{\omega}u_0}\right)+e^{-\frac{\pi i}{\omega}u+2n\delta}}.$$

Ein ebenso gebautes Glied erhält man, in welchem n negativ ist. Endlich kann der erst hingeschriebene Beitrag für $n=0$ einbezogen werden, und so ergibt sich:

$$u\frac{\pi i}{\omega}=2v\pi i,\quad u_0\frac{\pi i}{\omega}=2v_0\pi i,\quad \frac{\omega'}{\omega}=\tau,\quad \delta=-\tau\pi i,$$

$$(7.)\quad \frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0)-\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0)-2\frac{\eta u_0}{\omega}=-\frac{\pi i}{\omega}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n}\frac{e^{2v_0\pi i}-e^{-2v_0\pi i}}{e^{2v\pi i+2n\delta}-(e^{2v_0\pi i}+e^{-2v_0\pi i})+e^{-2v\pi i-2n\delta}}.$$

Diese Formel gilt ganz allgemein, genau wie die Formel für σu, aus der sie abgeleitet ist. Jetzt nehmen wir rechts

$$\omega=\frac{\pi}{2},\quad \omega'=\frac{\delta i}{2};$$

dann wird

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+u_0)-\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0)-2\frac{\eta u_0}{\omega}=-2i\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n}\frac{e^{2u_0 i}-e^{-2u_0 i}}{e^{2ui+2n\delta}-e^{2u_0 i}-e^{-2u_0 i}+e^{-2ui-2n\delta}}.$$

Endlich ersetzen wir u und u_0 durch imaginäre Werte und erhalten

$$-i\frac{\sigma'}{\sigma}(ui+u_0 i)+i\frac{\sigma'}{\sigma}(ui-u_0 i)-2\frac{\eta u_0}{\omega}=2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n}\frac{e^{2u_0}-e^{-2u_0}}{e^{2u+2n\delta}-e^{2u_0}-e^{-2u_0}+e^{-2u-2n\delta}}.$$

Vermehren wir also u um $\frac{\delta}{2}$, so wächst links ui um $\frac{\delta i}{2}=\omega'$, es wird also:

$$(8.)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n}\varrho_n=\frac{1}{2}a\,\frac{e^{\delta}-e^{-\delta}}{e^{2u_0}-e^{-2u_0}}\left\{-\frac{2\eta}{\omega}u_0+i\frac{\sigma'}{\sigma}(ui-u_0 i+\omega')-i\frac{\sigma'}{\sigma}(ui+u_0 i+\omega')\right\}.$$

Die $\frac{\sigma'}{\sigma}$-Ausdrücke können sofort nach Art. 11 weiter umgeformt werden. Auch kann man sie durch $\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}$ ersetzen. Wir unterlassen das, um es bei der Anwendung auf besondere Fälle nachzuholen, soweit es nützlich scheint.

Die Gleichung (8.) liefert die gesuchte Bestimmung der Kreisumfänge unserer Reihe ganz allgemein. Schreiten wir nun zur Bestimmung der Flächen der Kreise.

Aus (6.) folgt sofort

$$\varrho_n^2 = \frac{1}{2} a (e^{\delta} - e^{-\delta}) \frac{1}{e^{2u_0} - e^{-2u_0}} \cdot \frac{\partial \varrho_n}{\partial u_0}. \tag{9.}$$

Daher ist

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{-\infty}^{+\infty} \varrho_n^2 = -\frac{1}{2} a^2 (e^{\delta} - e^{-\delta})^2 \frac{e^{2u_0} + e^{-2u_0}}{(e^{2u_0} - e^{-2u_0})^3} \\ \qquad \left\{ -\frac{2\eta}{\omega} u_0 + i \cdot \frac{\sigma'}{\sigma}(ui - u_0 i + \omega') - i \cdot \frac{\sigma'}{\sigma}(ui + u_0 i + \omega') \right\} \\ -\frac{1}{4} a^2 (e^{\delta} - e^{-\delta})^2 \frac{1}{(e^{2u_0} - e^{-2u_0})^2} \left\{ \frac{2\eta}{\omega} + \wp(ui - u_0 i + \omega') + \wp(ui + u_0 i + \omega') \right\}. \end{array} \right. \tag{10.}$$

Diese Formel liefert die Inhalte der Kreise unserer Reihen.

5.

Wir wenden uns nunmehr zur Bestimmung der Umfänge und Flächen in einigen besonderen Fällen.

1. Die Kreisreihe berühre einen Kreis und eine ihn schneidende Gerade. Für diesen Fall ist $u_0 = 0$; dann erhält man eine Reihe, welche den Kreis von außen berührt, oder $u_0 = \frac{\pi i}{2}$, also $u_0 i = -\omega$; dann ist die Kreisreihe dem Segment einbeschrieben (§ 3 dieser Abhandlung).

Da Zähler und Nenner in (8.) für $u_0 = 0$ verschwinden, leiten wir nach u_0 ab und erhalten

$$\Sigma \varrho_n = -\frac{1}{4} a (e^{\delta} - e^{-\delta}) \left(\frac{\eta}{\omega} + \wp(ui + \omega') \right). \tag{11.}$$

Für $u_0 i = -\omega$ ergibt sich ebenso

$$\Sigma \varrho_n = \frac{1}{4} a (e^{\delta} - e^{-\delta}) \left(\frac{\eta}{\omega} + \wp(ui + \omega + \omega') \right). \tag{12.}$$

Es ist also

$$(12^{a}.)\quad \begin{cases} \sum_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{\left(e^{u+\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}+e^{-\left(u+\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta\right)}\right)^{2}} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\eta}{\omega}+\wp\left(ui+\omega+\omega'\right)\right); \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{\left(e^{u+n\delta}-e^{-u-n\delta}\right)^{2}} = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\eta}{\omega}+\wp\left(ui\right)\right). \end{cases}$$

Führen wir noch die Segmenthöhe $s=\frac{1}{2}a(e^{\delta}-e^{-\delta})$ ein, ferner $\eta=\alpha\omega$, so finden wir

1. $2\pi\Sigma\varrho_n=\pi s\left(\frac{1}{3}-\alpha\right)=A_0$.

$u=\omega'$. Der unendlich große Kreis ist ausgeschlossen. Die Kreisreihe entspringt an der zur Sehne parallelen Tangente an dem vom Segment abgewandten Bogen. Sie zerfällt in zwei getrennte Reihen.

2. $u=0$.

$$2\pi\Sigma\varrho_n=-\pi s(\alpha+e_3)=A_3.$$

Die Kreisreihe berührt denselben Bogenteil wie die vorige, entspringt aber aus einem den zur Sehne senkrechten Durchmesser berührenden Kreispaar. Sie ist also in sich geschlossen und endigt an den Enden des Segments.

3. Aus (12.) ergibt sich für $ui=\omega'$, $u=\frac{\delta}{2}$

$$2\pi\Sigma\varrho_n=\pi s(\alpha+e_1)=A_1.$$

Die Kreisreihe ist dem Segment einbeschrieben und entspringt aus einem die Sehnenmitte berührenden Kreise.

4. $u=0$,

$$2\pi\Sigma\varrho_n=\pi s(\alpha+e_2)=A_2.$$

Die Kreisreihe entspringt aus zwei den zur Sehne senkrechten Durchmesser berührenden Kreisen und liegt im Innern des Segments.

Aus $e_1+e_2+e_3=0$ ergibt sich die merkwürdige Beziehung:

(13.) $$A_1+A_2-A_3+3A_0=s\pi.$$

Die Summe der Umfänge der beiden inneren Kreisreihen vermindert um die geschlossene äußere, vermehrt um die dreifache letzte gibt den Umfang des größten Kreises der ersten Reihe.

Zur Bestimmung der Inhalte kann man auch direkt vorgehen, ohne Anwendung der allgemeinen Formel (10.). Durch zweimalige Ableitung folgt aus (12ª.)

$$6\Sigma\frac{1}{\Im\mathfrak{n}^4(u+n\delta)}=\wp''(ui)+4\wp(ui)+4\alpha.$$

Für $u=0,\ \frac{\delta}{2},\ \frac{\pi i}{2},\ \frac{\delta}{2}+\frac{\pi i}{2}$ entspringen hieraus die Kreisreihen. Bei $u=0$ ist der unendlich große Kreis abzuscheiden. Bezeichnen wir die Flächen der Kreisreihen obiger Bezeichnung entsprechend mit B_0, B_1, B_2, B_3, so folgt

$$(14.)\qquad \begin{cases} B_0=s^2\pi\left\{\frac{1}{240}g_2+\frac{1}{6}\alpha-\frac{11}{180}\right\}, \\ B_\lambda=s^2\pi\left\{\frac{1}{6}e_\lambda+\frac{1}{6}\alpha+\frac{1}{12}(e_\lambda-e_\mu)(e_\lambda-e_\nu)\right\}. \end{cases} \qquad \lambda=(1,2,3)$$

Für $a=0$ erhalten wir einen Grenzfall, welcher ohne Hilfe der elliptischen Funktionen behandelt werden kann. Wir haben die Aufgabe:

Gegeben ein Kreis und eine Tangente desselben. Man bestimme die Summe der Umfänge und Flächen von Kreisen, welche jeder den vorhergehenden und nachfolgenden und den festen Kreis und seine feste Tangente berühren.

Die Lösung kann direkt gefunden werden. Sind ϱ_1, ϱ die Radien zweier auf einander folgenden Kreise der Reihe, so ist

$$\sqrt{r\varrho}-\sqrt{r\varrho_1}=\sqrt{\varrho\varrho_1},$$

wenn r den Radius des festen Kreises bezeichnet. Zur Lösung führt nun die Annahme

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho}}=\log u,\quad \frac{1}{\sqrt{\varrho_1}}=\log(up),\quad \frac{1}{\sqrt{r}}=\log p.$$

Auch kann die Lösung gefunden werden, indem man von den Formeln des Art. 42 der Formeln und Lehrsätze Gebrauch macht und zur Grenze übergeht. Man findet

$$A_3=2r\pi^3,\qquad A_0=\frac{1}{3}A_3,$$

$$B_3=\frac{1}{3}r^2\pi^5,\qquad B_0=\frac{1}{15}B_3.$$

Für den *Halbkreis* ist $a = r$, $2 = e^{\delta} - e^{-\delta}$, also

$$e^{\delta} = \sqrt{2} + 1, \qquad e^{-\delta} = \sqrt{2} - 1 = h.$$

In diesem Falle habe ich die Rechnungen durchgeführt. Ich fand:

$$h = 0{,}4142136, \qquad \delta = 0{,}8813734,$$

$$h' = 0{,}0000137015, \qquad a = -1{,}96586.$$

$$\log \text{nat}\, h \cdot \log \text{nat}\, h' = \pi^2.$$

$$e_1 = 4{,}23644, \qquad e_2 = 4{,}23365, \qquad e_3 = -8{,}47009.$$

$$A_1 = 2{,}270576 \cdot r\pi, \qquad A_2 = 2{,}267794 \cdot r\pi,$$

$$A_3 = 10{,}43595 \cdot r\pi, \qquad A_0 = 2{,}299209 \cdot r\pi,$$

$$B_1 = 0{,}3813788 \cdot r^2\pi, \qquad B_2 = 0{,}3750166 \cdot r^2\pi,$$

$$B_3 = 11{,}71240 \cdot r^2\pi, \qquad B_0 = 0{,}5080228 \cdot r^2\pi,$$

$$g_2 = 215{,}2274, \qquad g_3 = -607{,}665.$$

6.

Für den Fall der Kreisreihen, welche zwei gleiche sich schneidende Kreise berühren, beschränke ich mich auf Angabe des Ergebnisses.

Weil

$$u_0 = \frac{\delta}{2}, \qquad u_0 i = \omega',$$

wird aus (8.) unter Benutzung der Formel

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{1}{2}\pi i$$

und

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u + 2\omega') - \frac{\sigma'}{\sigma}(u) = 2\eta':$$

$$\Sigma \varrho_n = -a.$$

Das Vorzeichen erklärt sich durch die Richtung der Messung. Die Summe der Durchmesser ist in der Tat 2a.

Für die Summe der Inhalte findet man

$$\Sigma\varrho_n^2 = \frac{1}{2}a^2\frac{e^{\delta}+e^{-\delta}}{e^{\delta}-e^{-\delta}} - \frac{1}{2}a^2\left\{\frac{\eta}{\omega}+\wp(ui)\right\}.$$

Diese Formel steht in naher Beziehung zu der für die Summe der Umfänge im vorigen Falle gefundenen.

Es ergeben sich ähnliche Ausdrücke wie dort, wenn man zu den halben Perioden übergeht. Auch läßt sich ein entsprechender Satz über die Flächen aussprechen. Der hier hervortretende Zusammenhang kann einfach entwickelt werden, wenn man die identische Gleichung

$$\frac{z^2h^{2n}+1}{z^2h^{2n}-1} - \frac{z^2h^{2n+2}+1}{z^2h^{2n+2}-1} = -\frac{z^2h^{2n}(1-h^2)}{z^4h^{4n+2}-z^2h^{2n}(1+h^2)+1}$$

quadriert und die linke Seite in

$$\frac{4z^2h^{2n}}{(z^2h^{2n}-1)^2} + \frac{4z^2h^{2n+2}}{(z^2h^{2n+2}-1)^2} - \frac{4z^2h^{2n}(1+h^2)}{z^4h^{4n+2}-z^2h^{2n}(1+h^2)+1}$$

umformt.

Endlich soll noch der Fall $u_0 = \frac{\pi}{4}i$ erwähnt werden, in welchem OB den Kreis AOB berührt. Aus (2.) folgt

$$\varrho_n = \frac{a(e^{\delta}-e^{-\delta})}{e^{2u+(2n+1)\delta}+e^{-2u-(2n+1)\delta}}.$$

Die Formeln (8.) und (10.) sind unmittelbar anwendbar. Letztere gestaltet sich besonders einfach, da ein Summand wegfällt. Bemerkenswert ist das Auftreten der Viertelperiode.

Mit den hier vorgetragenen Lösungen ist die Aufgabe der Kreisreihen in der Ebene der Hauptsache nach erschöpft. Es schließen sich an die hier behandelten Aufgaben andere an, z. B. über Kugelreihen, welche zwei Ebenen und eine Kugel berühren. Auch kann man die Aufgabe stellen, die einem Kugelzweieck eingezeichnete Kreisreihe nach Umfang und Fläche zu bestimmen. Die Verwendung der umgekehrten Abbildung ist auch für diese Aufgabe sehr naheliegend. Doch scheint die Summierung der entstehenden Reihen auf weitere Schwierigkeiten zu führen.

Wenn man in der ursprünglichen Punktreihe jedesmal einen Punkt überschlägt, so erhält man eine neue Reihe

$$x_0,\ p^2x_0,\ p^4x_0, \ldots p^{2n}x_0.$$

Bildet man die so entstehende Kreisreihe ab, so erhält man die entsprechende Darstellung für eine elliptische Funktion $\wp(u)$, welche dieselbe reelle und die doppelte imaginäre Periode besitzt wie die ursprüngliche. Geht man dagegen von der Punktreihe

$$x_0,\ \sqrt{p}x_0,\ px_0,\ (\sqrt{p})^3 x_0, \ldots p^{\frac{1}{2}^n} x_0$$

aus, so erhält man eine elliptische Funktion mit den Perioden $2\omega, \omega'$.

Auch mit dem *Steiner*schen Schließungsproblem kann unsere Aufgabe in Verbindung gesetzt werden, bei welchem eine Kreisreihe zwei gegebene Kreise berührt.

Über die Zerlegung von Funktionen mehrerer Variabeln in irreduktible Faktoren.

Von Herrn *M. Mandl* in Laibach.

Im 113. Bande dieses Journals (Seite 252 u. ff.) hat der Verfasser eine Methode angegeben, wie darüber entschieden werden kann, ob eine vorgelegte ganze, ganzzahlige Funktion *einer* Variabeln reduktibel ist oder nicht, und wie, im Falle der Reduktibilität, diese Funktion zugleich in ihre sämtlichen rationalen Faktoren aufgelöst werden kann. Diese Methode soll hier auf Funktionen von beliebig vielen Variabeln ausgedehnt werden.

In der folgenden Entwicklung soll vorausgesetzt werden, daß irgend ein Verfahren zur Zerlegung einer Funktion von p Variabeln bereits bekannt sei, und es soll daraus die Faktorenzerlegung einer beliebigen Funktion von $p+1$ Variabeln hergeleitet werden. Zunächst soll gezeigt werden, daß, wenn F die vorgelegte Funktion der $p+1$ Variabeln $x, x_1, x_2, x_3, \ldots x_p$ und x irgend eine dieser Variabeln ist, die Funktion F stets auf die Form

$$F = f_0 \cdot x^n + f_1 \cdot x^{n-1} + f_2 \cdot x^{n-2} + \cdots + f_{n-1} \cdot x + f_n$$

gebracht werden kann, wo f_0 eine von Null verschiedene Konstante, und $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ ganze Funktionen des 1., 2., 3., ... n-ten Grades in den p Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_p$ sind.

Denn ist F die vorgelegte Funktion n-ten Grades mit den Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots x_p$, so kann diese außer den Gliedern n-ten Grades auch solche des $(n-1)$-ten, $(n-2)$-ten, ... Grades enthalten, oder es ist

$$F = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_2 + u_1 + u_0,$$

worin $u_n, u_{n-1}, \dots u_1, u_0$ homogene Funktionen des n-ten, $(n-1)$-ten, ... Grades sämtlicher Variabeln sind.

Das erste Glied u_n kann aus den n-ten Potenzen der einzelnen Variabeln und aus Produkten von Potenzen verschiedener Variabeln zusammengesetzt sein. Nun läßt sich F immer derart umformen, daß u_n mindestens einen Posten von der Form x^n enthält; denn wäre z. B.

$$u_n = A x^{\varkappa} x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \cdots + B x^{\lambda} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots + C x^{\mu} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots + \cdots,$$

$$(\text{wo } \varkappa + \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots = \lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = \mu + \mu_1 + \cdots = n),$$

so braucht man nur folgende Substitution anzuwenden:

$$x_1 = a_1 x + v_1;\ x_2 = a_2 x + v_2; \dots x_p = a_p x + v_p,$$

wo $v_1, v_2, \dots v_p$ p neue Variabeln bedeuten und $a_1, a_2, \dots a_p$ noch näher zu bestimmende Parameter sind.

Infolge dieser Substitution ist

$$u_n = A x^{\varkappa} \cdot (a_1 x + v_1)^{\varkappa_1} \cdot (a_2 x + v_2)^{\varkappa_2} \cdots + B x^{\lambda} \cdot (a_1 x + v_1)^{\lambda_1} \cdot (a_2 x + v_2)^{\lambda_2} \cdots + \cdots,$$

und dieser Ausdruck beginnt, nach Potenzen von x entwickelt, mit einem Gliede $c x^n$, wobei

$$c = A a_1^{\varkappa_1} a_2^{\varkappa_2} \cdots + B a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots + \cdots$$

ist. Wählt man nun die Parameter $a_1, a_2, \dots a_n$ so, daß c von Null verschieden (im übrigen aber ganz beliebig) ist, was auf unendlich viele Arten geschehen kann,*) so läßt sich u_n in der Form schreiben:

$$c x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots,$$

worin c eine von Null verschiedene Konstante, $c_1, c_2, c_3, \dots$ aber Funktionen des 1., 2., 3., ... Grades von den Variabeln $v_1, v_2, \dots v_n$ sind.

Hiernach läßt sich auch die ursprünglich gegebene Funktion F, nach Potenzen von x entwickelt, in der Form schreiben:

$$F = f_0 x^n + f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} + \cdots + f_{n-1} x + f_n,$$

---

*) Denkt man sich nämlich alle a-Größen bis auf eine einzige, z. B. a_1, beliebig aber fest gewählt, so braucht diese letzte Größe a_1 nur so bestimmt zu werden, daß $c = A a_1^{\varkappa_1} a_2^{\varkappa_2} a_3^{\varkappa_3} \cdots + B a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} a_3^{\lambda_3} \cdots + \cdots$ nicht verschwindet. Da aber c, als ganze rationale Funktion von a_1, nur für eine endliche Anzahl spezieller Werte von a_1 verschwinden kann, so genügen alle übrigen unendlich vielen Zahlen, als Werte von a_1 angenommen, der Bedingung, daß $c \neq 0$ ist.

worin f_0 eine von Null verschiedene Konstante und $f_1, f_2, \dots f_n$ der Reihe nach höchstens vom 1., 2., ... n-ten Grade bezüglich der Variabeln $v_1, v_2, \dots v_n$ sind.

Soll nun F in zwei rationale Faktoren Φ und Ψ zerlegbar sein, so muß eine Gleichung von folgender Form bestehen:

$$f_0 x^n + f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} + \cdots + f_n$$
$$= (\varphi_0 x^\alpha + \varphi_1 x^{\alpha-1} + \cdots + \varphi_{\alpha-1} x + \varphi_\alpha)(\psi_0 x^\beta + \psi_1 x^{\beta-1} + \cdots + \psi_{\beta-1} x + \psi_\beta)$$

worin die φ und ψ analoge Eigenschaften haben, wie die f, und wobei $\alpha + \beta = n$ ist. Hieraus ergibt sich, durch Vergleichung der Koeffizienten übereinstimmender Potenzen von x zu beiden Seiten der letzten Gleichung, das folgende Gleichungssystem:

$$\text{(I.)} \qquad f_{n-r} = \sum_{k=0}^{k=r} \varphi_{\alpha-k} \cdot \psi_{\beta-r+k}, \qquad (r = 0, 1, 2, \dots n)$$

wobei zu beachten ist, daß jedesmal $\varphi_\mu = 0$, $\psi_\nu = 0$ zu setzen ist, so oft $\mu < 0$, $\nu < 0$ auftritt. Die Aufgabe der Zerlegung von F in zwei rationale ganze Funktionen ist demnach identisch mit der Aufgabe, zwei Systeme von rationalen ganzen Funktionen $\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha-1}, \dots; \varphi_\beta, \psi_{\beta-1}, \dots$ der Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ zu ermitteln, welche dem Gleichungssystem (I.) Genüge leisten.

Um diese Funktionensysteme zu bestimmen, schreiben wir (I.) zunächst in folgender Form:

$$f_n = \varphi_\alpha \cdot \psi_\beta,$$
$$f_{n-1} = \varphi_\alpha \cdot \psi_{\beta-1} + \psi_\beta \cdot \varphi_{\alpha-1},$$
$$f_{n-r} = \sum_{k=0}^{k=r} \varphi_{\alpha-k} \cdot \psi_{\beta-r+k} = \varphi_\alpha \cdot \psi_{\beta-r} + \psi_\beta \cdot \varphi_{\alpha-r} + \sum_{k=1}^{k=r-1} \varphi_{\alpha-k} \psi_{\beta-r+k} \cdot$$
$$(r = 2, 3, 4, \dots n)$$

Setzt man ferner der Kürze halber

$$f_{n-r} - \sum_{k=1}^{k=r-1} \varphi_{\alpha-k} \cdot \psi_{\beta-r+k} = F_{n-r} \qquad (\text{und } f_{n-1} = F_{n-1}),$$

so kann man das Gleichungssystem (I.) durch das folgende ersetzen:

$$\text{(II.)} \qquad \begin{cases} \varphi_\alpha \cdot \psi_\beta = f_n, \\ \varphi_\alpha \cdot \psi_{\beta-r} + \psi_\beta \cdot \varphi_{\alpha-r} = F_{n-r}. \end{cases} \qquad (r = 1, 2, \dots n)$$

Um mit Hilfe dieses Gleichungssystems die Funktionen $\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha-1}, \varphi_{\alpha-2}, \dots; \psi_\beta, \psi_{\beta-1}, \psi_{\beta-2}, \dots$ zu berechnen, bestimmt man zuerst φ_α und ψ_β, indem

man f_n auf irgend eine Art in zwei rationale ganze Funktionen der Variabeln $x_1, \dots x_n$ zerlegt — was nach den eingangs gemachten Bemerkungen als ausführbar vorausgesetzt werden darf. Hierauf findet man aus (II.) für $r=1$ die Funktionen $\varphi_{\alpha-1}$, $\psi_{\beta-1}$ mit Hilfe der Gleichung

$$\varphi_\alpha \cdot \psi_{\beta-1} + \psi_\beta \cdot \varphi_{\alpha-1} = F_{n-1} = f_{n-1},$$

indem man $\varphi_{\alpha-1}$, $\psi_{\beta-1}$ in der allgemeinsten Form einer ganzen Funktion des $(\alpha-1)$-ten, bezw. $(\beta-1)$-ten Grades in den Variabeln $x_1, \dots x_n$ mit vorläufig willkürlichen Koeffizienten ansetzt und diese letzteren nachträglich dadurch bestimmt, daß man je zwei Glieder auf verschiedenen Seiten der letzten Gleichung, welche analoge Zusammensetzungen der Variabeln enthalten, einander gleich setzt. Dadurch ergibt sich eine Anzahl von linearen Gleichungen zur Berechnung der willkürlichen Koeffizienten von $\varphi_{\alpha-1}$ und $\psi_{\beta-1}$.

Setzt man weiterhin in (II.) $r=2$, so hat man

$$\varphi_\alpha \cdot \psi_{\beta-2} + \psi_\beta \cdot \varphi_{\alpha-2} = F_{n-2} = f_{n-2} - \varphi_{\alpha-1} \cdot \psi_{\beta-1},$$

und wenn abermals $\varphi_{\alpha-2}$, $\psi_{\beta-2}$ als ganze Funktionen mit willkürlichen Koeffizienten angesetzt werden, so erhält man zur Berechnung dieser Koeffizienten, durch Vergleichung analoger Glieder zu beiden Seiten der letzten Gleichung, eine Anzahl von linearen Bedingungsgleichungen, worauf man zur Berechnung von $\varphi_{\alpha-3}$, $\psi_{\beta-3}$ übergeht usw. Auf diese Weise findet man zu jeder Faktorenzerlegung $f_n = \varphi_\alpha \cdot \psi_\beta$ zwei Reihen von Funktionen $\varphi_{\alpha-1}, \varphi_{-2}, \varphi_{\alpha-3}, \dots$; $\psi_{\beta-1}, \psi_{\beta-2}, \psi_{\beta-3} \dots$ und damit eine Faktorenzerlegung der ursprünglich gegebenen Funktion F.

Die Frage ist nur, ob und unter welchen Umständen die Gleichung

$$\varphi_\alpha \cdot \psi_{\beta-r} + \psi_\beta \cdot \varphi_{\alpha-r} = F_{n-r}$$

eine Berechnung der Funktionen $\varphi_{\alpha-r}$, $\psi_{\beta-r}$ auch wirklich zuläßt, d. h. ob und unter welchen Umständen die Anzahl der zur Verfügung stehenden linearen Gleichungen mit der Anzahl der zu ermittelnden unbestimmten Koeffizienten von $\varphi_{\alpha-r}$ und $\psi_{\beta-r}$ übereinstimmt. — Um diese Frage zu entscheiden, wollen wir sowohl die zu ermittelnden Koeffizienten als auch die verfügbaren Bedingungsgleichungen abzählen und beide Zahlen einander gegenüberstellen.

Bekanntlich hat eine ganze Funktion des n-ten Grades mit p Variabeln im allgemeinsten Falle $\binom{n+p}{p}$ Glieder, und da F_{n-r} vom $(n-r)$-ten Grade ist, so besteht diese Funktion im allgemeinen aus $\binom{n-r+p}{p}$ Termen. Es stehen somit zur Berechnung der Koeffizienten von $\varphi_{\alpha-r}$ und $\psi_{\beta-r}$ im ganzen $\binom{n-r+p}{p}$ Gleichungen zur Verfügung. Die Anzahl der unbestimmten Koeffizienten dagegen beträgt (da $\varphi_{\alpha-r}$, $\psi_{\beta-r}$ vom $(\alpha-r)$-ten bezw. $(\beta-r)$-ten Grade ist)

$$\binom{\alpha-r+p}{p}+\binom{\beta-r+p}{p},$$

und es handelt sich somit um die Auflösung von $\binom{n-r+p}{p}$ Gleichungen mit $\binom{\alpha-r+p}{p}+\binom{\beta-r+p}{p}$ Unbekannten. Je nachdem nun in der Formel

$$\text{(III.)} \qquad \binom{n-r+p}{p} \gtreqless \binom{\alpha-r+p}{p}+\binom{\beta-r+p}{p}$$

das obere, mittlere oder untere Zeichen gilt, ist die Aufgabe der Berechnung von $\varphi_{\alpha-r}$, $\psi_{\beta-r}$ im allgemeinen überbestimmt, bestimmt oder unbestimmt. — Es soll nun gezeigt werden, daß in (III.) im allgemeinen das obere Zeichen richtig ist, und daß nur in dem Falle, wo es sich um die Berechnung von $\varphi_{\alpha-1}$, $\psi_{\beta-1}$ handelt und überdies die φ und ψ Funktionen einer einzigen Variabeln sind, das mittlere Zeichen Geltung hat.

Wir machen dabei von der bekannten Zerlegung eines beliebigen Binomialkoeffizienten in eine Summe von Binomialkoeffizienten nach folgender Gleichung Gebrauch:

$$\text{(IV.)} \quad \begin{cases} \binom{n-r+p}{p}=\binom{n-r+p-1}{p-1}+\binom{n-r+p-2}{p-1} \\ \qquad +\binom{n-r+p-3}{p-1}+\cdots+\binom{p}{p-1}+\binom{p-1}{p-1} \end{cases}$$

und ganz analog:

$$\text{(V.)} \quad \begin{cases} \binom{\alpha-r+p}{p}=\binom{\alpha-r+p-1}{p-1}+\binom{\alpha-r+p-2}{p-1} \\ \qquad +\binom{\alpha-r+p-3}{p-1}+\cdots+\binom{p}{p-1}+\binom{p-1}{p-1}, \\ \binom{\beta-r+p}{p}=\binom{\beta-r+p-1}{p-1}+\binom{\beta-r+p-2}{p-1} \\ \qquad +\binom{\beta-r+p-3}{p-1}+\cdots+\binom{p}{p-1}+\binom{p-1}{p-1}. \end{cases}$$

Da $n=\alpha+\beta$, also $n>\alpha$ und $n>\beta$, so kann (IV.) in folgender Weise geschrieben werden:

$$\binom{n-r+p}{p}=\left[\binom{n-r+p-1}{p-1}+\binom{n-r+p-2}{p-1}+\cdots+\binom{\beta-r+p}{p-1}\right]$$
$$+\left[\binom{\beta-r+p-1}{p-1}+\binom{\beta-r+p-2}{p-1}+\cdots+\binom{p}{p-1}+\binom{p-1}{p-1}\right]$$

oder

$$\text{(VI.)}\quad \binom{n-r+p}{p}=\left[\binom{n-r+p-1}{p-1}+\cdots+\binom{\beta-r+p}{p-1}\right]+\binom{\beta-r+p}{p}.$$

Durch Benutzung von (V.) und (VI.) nimmt (III.) die folgende Form an:

$$\text{(VII.)}\quad \begin{cases}\binom{n-r+p-1}{p-1}+\binom{n-r+p-2}{p-1}+\cdots+\binom{\beta-r+p}{p-1}\\ \gtreqless\binom{\alpha-r+p-1}{p-1}+\binom{\alpha-r+p-2}{p-1}+\cdots+\binom{p}{p-1}+\binom{p-1}{p-1}.\end{cases}$$

Die linke Seite dieser Formel enthält $n-\beta=\alpha$ Glieder, die rechte Seite aber $\alpha-r+1$ Glieder; daher ist die Gliederzahl links um $r-1$ größer als rechts. Außerdem ist das erste Glied links sicherlich größer als das erste Glied rechts, das zweite Glied links größer als das zweite Glied rechts usw., so daß man im allgemeinen behaupten darf, daß die linke Seite von (VII.) (und ebenso von (III.)) größer ist als die rechte. Nur in dem Falle, wo $p=1$ ist, sind die Glieder linker Hand nicht mehr größer als die gleichvielten Glieder auf der rechten Seite von (VII.), indem alle diese Glieder $=1$ sind. Und wenn überdies $r=1$ ist, so ist auch die Gliederanzahl links nicht mehr größer als jene rechts, und in diesem einzigen Falle gilt in (VII.) und (III.) das mittlere, d. i. das Gleichheitszeichen.

Hieraus folgt also die Richtigkeit obiger Behauptung, daß nämlich die Berechnung von $\varphi_{\alpha-r}$, $\psi_{\beta-r}$ von der Auflösung eines linearen Gleichungssystems abhängt, welches im allgemeinen *überbestimmt* ist, und das (von speziellen Werten der in F vorkommenden Konstanten abgesehen) nur in dem einzigen Falle genau bestimmt ist, wo es sich um $\varphi_{\alpha-1}$, $\psi_{\beta-1}$ handelt, und wo überdies sämtliche φ und ψ Funktionen einer einzigen Variabeln sind.

Nach diesen Auseinandersetzungen wird sich der Gang der Rechnung folgendermaßen gestalten: die vorgelegte Funktion wird durch eine einfache lineare Transformation auf die Form

$$F=f_0x^n+f_1x^{n-1}+f_2x^{n-2}+\cdots+f_{n-1}x+f_n$$

gebracht, wofern sie diese Form nicht schon besitzt; hierauf zerlegt man f_n in zwei Faktoren $\varphi_\alpha, \psi_\beta$ von den Geraden α, bezw. β (was als eine ausführbare Operation vorausgesetzt wurde) und bestimmt die Funktionen $\varphi_{\alpha-1}$, $\psi_{\beta-1}$ mit Hilfe der Gleichung

$$\varphi_\alpha \cdot \psi_{\beta-1} + \psi_\beta \cdot \varphi_{\alpha-1} = F_{n-1} = f_{n-1}.$$

Wenn die vorgelegte Funktion bloß zwei Variable enthält, d. h. wenn die φ und ψ Funktionen einer einzigen Variabeln sind, so liefert die letzte Gleichung im allgemeinen eine eindeutige Bestimmung für $\varphi_{\alpha-1}$, $\psi_{\beta-1}$. Enthalten dagegen die φ und ψ mehr als eine Variable, dann liefert die letzte Gleichung für die Berechnung von $\varphi_{\alpha-1}$, $\psi_{\beta-1}$ im allgemeinen ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem, aus welchem die Berechnung von $\varphi_{\alpha-1}$, $\psi_{\beta-1}$ nur in jenen besonderen Fällen möglich ist, in denen eine hinreichende Anzahl von Gleichungen des vorerwähnten Systems sich als Folge der übrigen Gleichungen darstellt. Nur in diesen besonderen Fällen existieren also Funktionen $\varphi_{\alpha-1}$, $\psi_{\beta-1}$ von der verlangten Eigenschaft, und sie lassen sich dann auch leicht berechnen. Man macht hierauf den Ansatz

$$\varphi_\alpha \cdot \psi_{\beta-2} + \psi_\beta \cdot \varphi_{\alpha-2} = F_{n-2} = f_{n-2} - \varphi_{\alpha-1} \cdot \psi_{\beta-1}$$

und sucht hieraus die Funktionen $\varphi_{\alpha-2}$, $\psi_{\beta-2}$ zu berechnen, was — wie früher gezeigt wurde — stets auf ein Gleichungssystem führt, das mehr Gleichungen als Unbekannte enthält. Wenn trotzdem das System, infolge der gegebenen speziellen Werte, sich auf ein auflösbares Gleichungssystem reduziert, so geht man zur Berechnung von $\varphi_{\alpha-3}$, $\psi_{\beta-3}$ über usw., bis alle φ und ψ, und damit eine Faktorenzerlegung der ursprünglich gegebenen Funktion gefunden sind. — Nunmehr zerlegt man jeden der eben gefundenen Faktoren Φ, Ψ bis zur vollständigen Zerlegung von F. So oft man jedoch bei der Berechnung zweier Funktionen $\varphi_{\alpha-r}$, $\psi_{\beta-r}$ auf ein widerspruchsvolles Gleichungssystem geführt wird, — oder auf ein solches, das keine *ganzzahligen* Auflösungen liefert, — kommt das ganze System

$$\varphi_\alpha,\ \varphi_{\alpha-1},\ \varphi_{\alpha-2}, \cdots \varphi_{\alpha-r+1}; \qquad \psi_\beta,\ \psi_{\beta-1},\ \psi_{\beta-2}, \cdots \psi_{\beta-r+1}$$

in Wegfall und man beginnt die Rechnung von neuem mit einer anderen Zerlegung von f_n.

Auf diese Weise können sukzessive alle rationalen Faktoren der vorgelegten Funktion F gefunden werden; ergibt sich für letztere keine rationale Zerlegung, so ist sie irreduktibel.

§ 2.

Bezüglich der Durchführung der Rechnung in einem gegebenen speziellen Falle muß noch eine Singularität in Betracht gezogen werden. Es kann sich nämlich ereignen, daß das letzte Glied von F zufällig von niedrigerem als dem n-ten Grade, also z. B. vom $(n-\nu)$-ten Grade ist, so daß in der Gleichung

$$f_n = \varphi_\alpha \cdot \psi_\beta$$

(VIII.) $$\alpha + \beta = n - \nu \qquad (\text{und nicht } = n)$$

ist. Dann macht man die Supposition, daß F in zwei Faktoren α'-ten und β'-ten Grades zu zerlegen sei, wo

$$\alpha' \geqq \alpha,\ \beta' \geqq \beta, \quad \text{und} \quad \alpha' + \beta' = n$$

ist. — Dem entsprechend betrachtet man φ_α, ψ_β als degenerierte Funktionen höheren Grades, und zwar:

φ_α als Funktion des Grades $\alpha' = \alpha + \varrho$

ψ_β „ „ „ „ $\beta' = \beta + \nu - \varrho$,

wobei ϱ irgend eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots \nu$ bedeuten kann und wo dann

$$\alpha' + \beta' = \alpha + \beta + \nu = n$$

ist. — Dies kann auf $\nu + 1$ Arten geschehen, und für jede einzelne Wahl von ϱ sucht man die Gleichung

$$\varphi_\alpha \cdot \psi_{\beta'-1} + \psi_\beta \cdot \varphi_{\alpha'-1} = f_{n-1}$$

in der bekannten Weise zur Ermittlung von $\varphi_{\alpha'-1}$, $\psi_{\beta'-1}$ zu benutzen. Dies gibt im ganzen $\nu + 1$ verschiedene Ansätze, von denen aber nicht mehr als einer zu einer Faktorenzerlegung von F führen kann.

Anmerkung: Es ginge nicht etwa an, eine Gleichung von der Form

$$\varphi_\alpha \cdot \psi' + \psi_\beta \cdot \varphi' = f_{n-1}$$

anzusetzen, worin ψ' und φ' so beschaffen sind, daß sie φ_α und ψ_β zum $(n-1)$-ten Grade ergänzen, so daß also

φ' vom $(n-1-\beta)$-ten Grade,

ψ' „ $(n-1-\alpha)$-ten „

ist, sonst müßte es zwei Faktoren Φ und Ψ von F geben, welche vom $(n-\beta)$-ten, bezw. $(n-\alpha)$-ten Grade sind. Dann wäre aber die Summe der Gradzahlen dieser Faktoren:

$$(n-\alpha)+(n-\beta)=n+(n-\alpha-\beta)=n+\nu, \text{ also } >n,$$

was unmöglich ist.*)

Die Ausführung von *Zahlenbeispielen* nach der eben erörterten Methode wird dadurch erheblich vereinfacht, daß sich oft mit einem Blick erkennen läßt, ob die linearen Gleichungssysteme, von denen die Bestimmung der Funktionen $\varphi_\alpha, \psi_\beta$ abhängt, vorerst eine Lösung überhaupt, dann aber eine solche in *ganzen* Zahlen zulassen.

---

*) Zu beachten ist schließlich, daß in dem eben betrachteten Falle (wo Gl. VIII besteht), unter den verschiedenen möglichen Faktorenzerlegungen von f_n auch die eine untersucht werden muß, wo f_n in das Produkt aus einer ganzen Funktion und einer Konstanten zerfällt, also auch die Zerlegung: $f_n=1\cdot f_n$, oder mit anderen Worten: Man hat in diesem Falle auch die Zerlegung $\varphi_\alpha=1$, $\psi_\beta=f_n$ zu berücksichtigen, wobei φ_α der Reihe nach als degenerierte Funktion des 1., 2., ... ν-ten Grades aufzufassen, ψ_β aber (das an und für sich den Grad $n-\nu$ besitzt) bezw. als Funktion des $(n-1)$-ten, $(n-2)$-ten, ... $(n-\nu)$-ten Grades zu behandeln ist.

Die Diskriminante der allgemeinen Kreisteilungsgleichung.

Von Herrn *Gustav Rados* in Budapest.

Die Diskriminante der Kreisteilungsgleichung hat insofern auf größeres Interesse Anspruch, als sie zugleich die Diskriminante des Gattungsbereiches ist, der durch die Kreisteilungsgleichung definiert wird. Sie liefert somit ohne weiteres jene im höheren Sinne des Wortes aufgefaßte wichtige Invariante des Bereiches, die allen arithmetischen Untersuchungen innerhalb des Artbereiches zugrunde zu legen ist. Wie im nachfolgenden gezeigt werden soll, kann die Diskriminante der allgemeinen Kreisteilungsgleichung ohne die Heranziehung der Idealtheorie*) (oder nach *Kronecker* der Theorie der algebraischen Divisoren) vermittelst ganz elementarer Betrachtungen hergeleitet werden.

Ist

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r} p_{r+1}^{a_{r+1}} \dots p_s^{a_s},$$

so sind die primitiven n-ten Einheitswurzeln die Wurzeln der Gleichung $\varphi(n)$-ten Grades:

$$\text{(I.)} \qquad \Phi_n(x) = \frac{(x^n-1)\,\Pi(x^{\frac{n}{p_1 p_2}}-1)\,\Pi(x^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}}-1)\dots}{\Pi(x^{\frac{n}{p_1}}-1)\,\Pi(x^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3}}-1)\,\Pi(x^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5}}-1)\dots}$$

*) In seinem Berichte „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper“ 1897 gibt Herr *Hilbert* S. 333 zu demselben Zwecke ein Verfahren an, das auf allgemeinen Sätzen beruht, zu deren Begründung der ganze Apparat der Idealtheorie angewendet wird. Vergl. den Satz 88 a. a. O. S. 267.

wo $\Pi(x^{\overline{p_1 p_2 \cdots p_z}} - 1)$ das Produkt derjenigen Faktoren bezeichnet, die aus dem Ausdrucke $x^{\overline{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_z}}} - 1$ hervorgehen, indem man an Stelle der Indizes $i_1, i_2, \ldots i_z$ der Reihe nach die z-gliedrigen Kombinationen ohne Wiederholung von $1, 2, 3, \ldots n$ setzt.

Der zu beweisende Satz wird durch die Gleichung

$$\text{Diskr. } \Phi_n(x) = \frac{(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} n^{\varphi(n)}}{p_1^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_1)}} p_2^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_2)}} \ldots p_s^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_s)}}}$$

dargestellt, wo das bekannte zahlentheoretische Symbol $\varphi(n)$ die Anzahl der ganzen Zahlen bedeutet, die kleiner als die Zahl n und außerdem noch relativ prim zu n sind.

Es sei r eine primitive n-te Einheitswurzel, ferner seien

$$k_1, k_2, \ldots k_i, \ldots k_{\varphi(n)}$$

die gegen n relativ primen ganzen Zahlen, die kleiner als n sind, dann liefert die Reihe der Potenzen

$$r^{k_1}, r^{k_2}, \ldots r^{k_i}, \ldots r^{k_{\varphi(n)}}$$

sämtliche Wurzeln der Gleichung (I.), es ist somit

$$\text{Diskr. } \Phi_n(x) = (-1)^{\frac{\varphi(n)[\varphi(n)-1]}{2}} \prod_{i=1}^{\varphi(n)} \Phi_n'(r^{k_i}),$$

wo $\Phi_n'(x)$ die erste Derivierte von $\Phi_n(x)$ bezeichnet. Nun schreiben wir die Gleichung (I.) folgendermaßen

$$(\text{I}^*.) \quad \begin{cases} \Phi_n(x)\, \Pi(x^{\frac{n}{p_1}} - 1)\, \Pi(x^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3}} - 1) \ldots \\ \qquad = (x^n - 1)\, \Pi(x^{\frac{n}{p_1 p_2}} - 1)\, \Pi(x^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}} - 1) \ldots \end{cases}$$

und setzen in der ersten Derivierten derselben $x = r^{k_i}$, nach dieser Substitution bleibt im Sinne der Relationen

$$\Phi_n(r^{k_i}) = 0, \qquad (r^{k_i})^n - 1 = 0$$

in den Derivierten beider Seiten (I*.) nur je ein Glied stehen und es ist

$$\text{(II.)} \quad \begin{cases} \Phi_n'(\varrho^{k_i}) \Pi[(\varrho^{k_i})^{\frac{n}{p_1}} - 1] \Pi[(\varrho^{k_i})^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3}} - 1] \dots \\ \qquad = n(\varrho^{k_i})^{n-1} \Pi[(\varrho^{k_i})^{\frac{n}{p_1 p_2}} - 1] \Pi[(\varrho^{k_i})^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}} - 1] \dots; \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \dots \varphi(n)) \end{cases}$$

indem man diese Identitäten mit einander multipliziert, folgt die Relation

$$(-1)^{\frac{\varphi(n)[\varphi(n)-1]}{2}} \text{Diskr.} \Phi_n(x) \prod_{i=1}^{\varphi(n)} \Pi[(\varrho^{k_i})^{\frac{n}{p_1}} - 1] \prod_{i=1}^{\varphi(n)} \Pi[(\varrho^{k_i})^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3}} - 1] \dots$$

$$= n^{\varphi(n)} \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (\varrho^{k_i})^{n-1} \prod_{i=1}^{\varphi(n)} \Pi[(\varrho^{k_i})^{\frac{1}{p_1 p_2}} - 1] \dots,$$

aus der die gesuchte Diskriminante sich ergibt.

Zur größeren Übersichtlichkeit der nachfolgenden Rechnung betrachten wir nun eingehender den Ausdruck

$$P_d = \prod_{i=1}^{\varphi(n)} [(\varrho^{\frac{n}{d}})^{k_i} - 1],$$

worin

$$d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_r^{\delta_r} \qquad (\delta_i \leqq a_i) \qquad (r \leqq s)$$

einen beliebigen Teiler von n bedeutet. Zunächst ist es evident, daß die sämtlichen Zahlen

$$(\varrho^{\frac{n}{d}})^{k_1}, \ (\varrho^{\frac{n}{d}})^{k_2}, \dots (\varrho^{\frac{n}{d}})^{k_{\varphi(n)}}$$

primitive d-te Wurzeln der Einheit sind; ist ja doch $\varrho^{\frac{n}{d}} = \varrho$ auch eine solche Wurzel, und es sind ferner die Exponenten k_i nicht nur gegen n, sondern auch gegen deren Teiler d relativ prim. Auf diese Weise wird die Untersuchung der Zahlen der Reihe

$$\text{(2)} \qquad \varrho^{k_1}, \ \varrho^{k_2}, \dots \varrho^{k_{\varphi(n)}}$$

nahegelegt. Da unter diesen Potenzen nur diejenigen gleich ausfallen, deren Exponenten (mod. d) kongruent sind, wird man schließlich auf die Frage geführt, wie oft eine jede der Zahlen, die kleiner als die Zahl d und relativ prim gegen dieselbe ist, in der Reihe

$$\text{(3.)} \qquad k_1, k_2, \dots k_{\varphi(n)}$$

enthalten ist, falls man die Zahlen (3.) (mod. d) betrachtet.

Es seien

$$l_1, l_2, \dots l_{\varphi(d)}$$

diejenigen Zahlen, die kleiner als d und relativ prim zu d sind; dann kann bewiesen werden, daß eine jede dieser Zahlen unter den Zahlen (3.) genau $\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}$-mal vorkommt, falls diese (mod. d) betrachtet werden.

Es sei zuerst bemerkt, daß die in den Reihen

$$l_i + d,\ l_i + 2d, \dots l + \frac{n}{d} d \qquad (S_i)$$

enthaltenen Zahlen sämtlich inkongruent mod. n, dagegen alle Zahlen je einer Reihe mod. d kongruent sind. Der gewünschte Beweis wird nun erbracht, indem gezeigt wird, daß jede Reihe (S_i) einen Komplex von Zahlen aus (3.) enthält, der aus $\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}$ Zahlen besteht. Bezeichnet man den größten Teiler der Zahl n, dessen Faktoren in d nicht enthalten sind, mit d', sodaß

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r} d', \quad d' = p_{r+1}^{a_{r+1}} \dots p_s^{a_s}, \quad (d, d') = 1$$

ist, so können die Zahlen einer Reihe (S_i) in die folgenden $\frac{n}{d d'}$ Partialreihen zerlegt werden:*)

$$l_i + [(j-1)d' + 1]d,\ l_i + [(j-1)d' + 2]d, \dots l_i + [(j-1)d' + d']d \quad (\Sigma_j)$$
$$\left(j = 1, 2, \dots \tfrac{n}{d d'}\right)$$

Da die Zahl d gegen d' relativ prim ist, liefert jede der Partialreihen (Σ_j) (mod. d') ein solches vollständiges Restsystem, dessen Zahlen zu d relativ prim sind, woraus folgt, daß die in (Σ_j) enthaltenen und zu d' relativ primen Zahlen und nur diese auch gegen n relativ prim sind; da eine Zahl stets und nur dann relativ prim zu n ist, wenn sie dieselbe Eigenschaft in bezug auf die Zahlen d, d' besitzt. Jede der Reihen (Σ_j) enthält $\varphi(d')$ Zahlen, die relativ prim zu d' sind; mithin enthält die Gesamtheit der Reihen (Σ_j), also eine Reihe (S_j), genau $\frac{n}{d d'} \cdot \varphi(d')$ Zahlen, die relativ prim zu n sind. Es ist jedoch

$$\frac{n}{d d'} \varphi(d') = \frac{p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}\, p_{r+1}^{a_{r+1}} \dots p_s^{a_s}}{p_1^{\delta_1} \dots p_r^{\delta_r}\, p_{r+1}^{a_{r+1}} \dots p_s^{a_s}} p_{r+1}^{a_{r+1}-1} \dots p_s^{a_s-1} (p_{r+1} - 1) \dots (p_s - 1) = \frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}.$$

---

*) Dieselbe Anordnung wurde bereits von Herrn *M. Bauer* in seinem Aufsatze „Számelméti tételek“ benutzt. Vgl. Mathematikai és Physikai Lapok V. p. 104 (Math. und Phys. Zeitschr.)

Hiermit ist zugleich dargetan, daß jede primitive d-te Einheitswurzel in der Reihe (2.) genau $\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}$-mal enthalten ist; außer diesen Zahlen enthält die Reihe (2.) überhaupt keine anderen, da die Anzahl der primitiven d-ten Einheitswurzeln $\varphi(d)$ und

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}\varphi(d)=\varphi(n)$$

ist. Es ergibt sich daher

$$P_d=\prod_{i=1}^{\varphi(d)}(r^{\frac{k_i n}{d}}-1)=\Big[\prod_{j=1}^{\varphi(d)}(\varrho^j-1)\Big]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}},$$

oder wenn man die Gleichung für die primitiven d-ten Einheitswurzeln in der Gestalt

$$\Phi_d(x)=0$$

ansetzt, so entsteht die Formel*)

$$P_d=\prod_{i=1}^{\varphi(n)}(r^{\frac{k_i n}{d}}-1)=(-1)^{\varphi(n)}[\Phi_d(1)]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}}.$$

Es ist nun aus der Theorie der Kreisteilungsgleichung bekannt, daß $\Phi_d(1)$ entweder gleich p wird, falls $d=p^\alpha$, oder aber gleich Eins ist, falls d verschiedene Primfaktoren besitzt (man vgl. z. B. *Weber:* Lehrbuch der Algebra I S. 461, Satz VII).

---

*) Dieses Resultat tritt sofort in Evidenz, sobald man die Irreduktibilität der Kreisteilungsgleichung und den Satz voraussetzen will, nach welchem der Grad der untergeordneten Gattung Teiler des Grades der enthaltenden Gattung ist. Die Zahl $\varrho=r^{\frac{n}{d}}$ ist nämlich eine Wurzel der irreduktiblen Gleichung $\Phi_d(x)=0$ vom Grade $\varphi(d)$, aus dieser Tatsache ergibt sich $\prod_{i=1}^{\varphi(n)}\left(x-r^{\frac{k_i n}{d}}\right)$ als Potenz der irreduziblen Funktion $\Phi_d(x)$, so daß

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)}\left(x-r^{\frac{k_i n}{d}}\right)=[\Phi_d(x)]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}}$$

wird, woraus dann wieder

$$P_d=(-1)^{\varphi(n)}[\Phi_d(1)]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}}$$

folgt.

Zieht man noch die folgenden Bemerkungen in Betracht: zuerst die Identität

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)} (\gamma^{ki})^{n-1} = [(-1)^{\varphi(n)} \Phi_n(0)]^{n-i}$$

und daß

$$\Phi_n(0) = \frac{(-1)^{\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots}}{(-1)^{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots}} = (-1)^{(1-1)^n} = 1$$

ist, und schließlich, daß die Zahl $\varphi(n)$ für $n > 2$ stets gerade ist, so kann (II.) auf die folgende Form gebracht werden:

$$(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \text{ Diskr. } \Phi_n(x)\, P_{p_1} P_{p_2} \dots P_{p_s} \cdot P_{p_1 p_2 p_3} P_{p_1 p_2 p_4} \dots$$
$$= n^{\varphi(n)} P_{p_1 p_2} P_{p_1 p_3} \dots P_{p_1 p_2 p_3 p_4} P_{p_1 p_2 p_3 p_5} \dots,$$

woraus der zu beweisende Satz, nämlich die Gleichung

$$\text{Diskr. } \Phi_n(x) = (-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \frac{n^{\varphi(n)}}{p_1^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_1)}} p_2^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_2)}} \dots p_s^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_s)}}}$$

folgt.

Auf Grund der obigen Formel kann man noch eine interessante zahlentheoretische Determinante auswerten.

Es ist nämlich

$$\text{Diskr. } \Phi_n(x) = |s_{\alpha+\beta}|, \qquad {}^{(\alpha,\beta=0,1,\dots\varphi(n)-1)}$$

worin s_k die k-te Potenzsumme der n-ten primitiven Einheitswurzeln bedeutet. Nach einem bekannten Satze ist aber

$$s_k = \frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{(n,k)}\right)} \varepsilon_{\frac{n}{(n,k)}},$$

wo (n, k) den größten gemeinschaftlichen Teiler der eingeklammerten Zahlen bezeichnet und das Symbol ε_d Null ist, falls d durch eine von Eins verschiedene Quadratzahl teilbar ist, sollten dagegen die Primfaktoren von d verschieden ausfallen, so ist ε_d gleich $+1$ oder -1 zu setzen, je nachdem die Anzahl der Primfaktoren gerade oder ungerade ist.

Es ergibt sich hiermit die Determinantenrelation

$$\begin{vmatrix} \varphi(n), & \frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{(n,1)}\right)}\varepsilon_{\frac{n}{(n,1)}}, & \frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{(n,2)}\right)}\varepsilon_{\frac{n}{(n,2)}}\cdots \\ \frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{(n,1)}\right)}\varepsilon_1, & \frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{(n,2)}\right)}\varepsilon_{\frac{n}{(n,2)}}, & \frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{(n,3)}\right)}\varepsilon_{\frac{n}{(n,3)}}\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}}\frac{n^{\varphi(n)}}{p_1^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_1)}}p_2^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_2)}}\cdots p_s^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_s)}}}.$$

Équations différentielles du premier ordre ayant des multiplicateurs de la forme

$$(y-u_1)^{\alpha_1}(y-u_2)^{\alpha_2}\dots(y-u_n)^{\alpha_n}.$$

Par M. *W. Ermakoff* à Kiew.

1.

Préface.

Dans le tome XXIV du Recueil mathématique de Moscou M. *A. N. Korkine* a publié un mémoire sous le titre: „Études des multiplicateurs des équations différentielles du premier ordre“.*)

Dans ce mémoire M. *Korkine* donne la solution du problème suivant:

Trouver l'expression la plus générale des fonctions M et N entières et rationnelles par rapport à y et telles que l'équation différentielle

$$M\partial x+N\partial y=0$$

admette le multiplicateur

$$(y-u_1)^{\alpha_1}(y-u_2)^{\alpha_2}\dots(y-u_n)^{\alpha_n}.$$

Plusieurs géomètres se sont occupés de ce problème avant M. *Korkine*, mais ils n'en ont examiné que des cas particuliers. M. *Korkine* réussit à prouver qu'il était toujours possible de résoudre le problème à l'aide d'intégrales définies. En outre il a indiqué les cas où la solution ne renferme pas d'intégrales définies.

Tout le monde sera d'accord sur l'importance capitale de ce résultat. Malheureusement le mémoire de M. *Korkine* est long (il contient 220 p.) et difficile à lire. Il ne sera lu, je le crains, que par peu de personnes et les résultats si précieux qui y sont établis courent le risque de passer inaperçus.

*) Ce mémoire a d'abord paru en langue française à St.-Pétersbourg, en 1902.

Mais on peut modifier l'analyse de M. *Korkine*.

Je constatai que les résultats établis dans son travail pouvaient être exposés d'une manière très simple et en n'y consacrant que quelques pages.

M. *Korkine* a remarqué que la solution du problème se ramène à l'intégration d'un système d'équations linéaires, où le nombre des fonctions inconnues est supérieur à celui des équations. Peut-on à l'aide d'opérations algébriques et de différentiations, déduire de ce système un système défini d'équations différentielles, où le nombre des fonctions inconnues serait égal à celui des équations? C'est à la solution de ce problème qu'est consacré le premier chapitre du mémoire de M. *Korkine*. Le cas où la somme des exposants du multiplicateur est égale à un nombre entier négatif est celui qui coûta le plus de peine à M. *Korkine*. Mais cette recherche peut être considérablement simplifiée en démontrant deux théorèmes généraux très simples. Le premier de ces théorèmes (§ 3 du présent mémoire) montre que le problème donné peut être remplacé par un problème analogue, où un certain nombre des exposants sont augmentés de nombres entiers. Le second théorème (§ 5) montre que la solution la plus générale du problème renferme une fonction arbitraire et un nombre fini de constantes arbitraires. Une fois ces théorèmes démontrés, les formules compliquées du premier chapitre deviennent inutiles. Dans les deux autres chapitres de son travail M. *Korkine* montre comment la solution complète du problème peut être exprimée au moyen d'intégrales définies. Ce n'est qu'à l'aide de nombreuses transformations qu'on réussit à obtenir des intégrales ayant une valeur finie. Or ces transformations découlent très simplement des théorèmes dont nous venons de parler.

J'ose croire que j'ai réussi à exposer les résultats précieux dus à M. *Korkine* sous une forme simple et claire et j'espère que la solution de son problème ainsi simplifiée pourra trouver sa place dans les traités des équations différentielles.

2.

Énoncé du problème et théorème fondamental.

Soient M et N deux fonctions algébriques entières par rapport à la variable y, ou deux polynômes en y, les coefficients de ces polynômes étant des fonctions de la variable x. L'objet de notre travail est la solution du problème suivant:

Trouver l'expression la plus générale des fonctions M et N telles que l'équation différentielle

$$M\partial x + N\partial y = 0 \tag{1.}$$

admette le multiplicateur

$$R = (y-u_1)^{\alpha_1}(y-u_2)^{\alpha_2}\dots(y-u_n)^{\alpha_n}, \tag{2.}$$

les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ étant des constantes et $u_1, u_2, \dots u_n$ des fonctions de la variable x.

Les fonctions M, N doivent vérifier, comme on sait, l'équation suivante

$$\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \log R}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \log R}{\partial y}. \tag{3.}$$

En remplaçant R par son expression (2.), l'équation (3.) prend la forme

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \Sigma\frac{\alpha_i(M+Nu_i')}{y-u_i}. \tag{4.}$$

Cette équation doit être vérifiée quelle que soit la valeur de y. Faisons $y = u_i$. Le second membre de (4.) ne devenant pas infini pour $y = u_i$, le polynôme $M(y) + N(y)\,u_i'$ doit être divisible par $y - u_i$. D'où

$$M(u_i) + N(u_i)\,u_i' = 0 \qquad (i=1,2,\dots n) \tag{5.}$$

On en tire la conclusion suivante.

Si l'expression (2.) est un multiplicateur de l'équation différentielle (1.), $u_1, u_2, \dots u_n$ sont des intégrales particulières de cette équation.

3.

Procédé permettant d'augmenter les exposants du multiplicateur.

Introduisons les notations suivantes:

$$F(y) = (y-u_1)(y-u_2)\dots(y-u_n), \tag{6.}$$

$$F_1(y) = F(y)\,\Sigma\frac{\alpha_i+1}{y-u_i}, \tag{7.}$$

$$F_2(y) = F(y)\,\Sigma\frac{(\alpha_i+1)u_i'}{y-u_i}. \tag{8.}$$

Supposons que nous ayons trouvé la solution la plus générale du problème énoncé dans le § 2 et soit (2.) un multiplicateur de l'équation (1.).

Je dis qu'on peut former une équation très simple dont le multiplicateur soit aussi égal à (2.). Soit v une fonction arbitraire de la variable x. Considérons l'équation différentielle suivante

$$d\{v F(y) R(y)\} = 0.$$

En divisant par R, elle prend la forme

$$\{F(y)\frac{\partial v}{\partial x} - v F_2(y)\}\,\partial x + v F_1(y)\,\partial y = 0. \tag{9.}$$

Cette équation admet le multiplicateur (2.). Retranchons maintenant l'équation (9.) de l'équation (1.); il viendra

$$\{M(y) - F(y)\frac{\partial v}{\partial x} + v F_2(y)\}\,\partial x + \{N(y) - v F_1(y)\}\,\partial y = 0. \tag{10.}$$

L'équation différentielle ainsi obtenue admet aussi le multiplicateur (2.).

Or on peut choisir v de telle façon que la fonction qui multiplie ∂y dans (10.) devienne divisible par $y - u_1$. Il suffit pour cela de faire

$$v = \frac{N(u_1)}{F_1(u_1)}. \tag{11.}$$

Observons maintenant qu'en vertu du théorème du § 2 la fonction $y = u_1$ est une intégrale particulière de l'équation (10.), et comme la fonction qui multiplie ∂y est divisible par $y - u_1$, il en est de même de la fonction qui multiplie ∂x dans (10.). Si donc on remplace v par l'expression (11.), l'équation différentielle (10.) sera divisible par $y - u_1$. Posons

$$\overline{M}(y) = \frac{M(y) - F(y)\frac{\partial v}{\partial x} + v F_2(y)}{y - u_1}, \quad \overline{N}(y) = \frac{N(y) - v F_1(y)}{y - u_1}. \tag{12.}$$

Les fonctions ainsi définies sont entières par rapport à y. Il en résulte que l'équation différentielle

$$\overline{M}(y)\,\partial x + \overline{N}(y)\,\partial y = 0 \tag{13.}$$

admet le multiplicateur

$$(y - u_1) R(y) = (y - u_1)^{a_1 + 1} (y - u_2)^{a_2} \ldots (y - u_n)^{a_n}. \tag{14.}$$

Donc, si l'on connaît la solution générale du problème initial; on peut trouver la solution générale d'un problème analogue où le facteur d'intégrabilité est donné par la formule (14.).

Nos formules ne s'appliquent plus dans le cas (et dans ce cas seulement) où $\alpha_1 = -1$. En effet, on aurait alors, en vertu de la formule (7.), $F_1(u_1) = 0$, et la fonction v donnée par la formule (11.) cesserait d'être finie.

Réciproquement, si l'on connaît la solution générale du second problème, on peut en déduire facilement celle du premier. Les équations (12.) donnent en effet

$$(15.) \qquad \begin{cases} M(y) = (y-u_1)\,\overline{M}(y) + F(y)\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\,F_2(y), \\ N(y) = (y-u_1)\,\overline{N}(y) + v\,F_1(y). \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans l'équation (1.), on aura la solution générale du premier problème. Il est à remarquer que dans les formules (15.) la fonction v est une fonction arbitraire de la variable x.

On voit donc que l'étude de notre problème peut toujours être ramenée à celle d'un problème analogue où l'un des exposants du multiplicateur est augmenté d'une unité. Tout exposant peut être augmenté d'une unité, sauf ceux qui sont égaux à -1.

En appliquant ce procédé plusieurs fois de suite, on ramènera notre problème à un problème analogue, où les exposants du multiplicateur sont augmentés de nombres entiers. Toutefois la précaution suivante doit être prise: *il faut qu'aucun des exposants entiers et négatifs ne devienne nul ou positif.*

En résumé, la solution de notre problème peut être déduite de celle du problème suivant:

Trouver la forme générale de l'équation différentielle

$$(16.) \qquad M_1(y)\,\partial x + N_1(y)\,\partial y = 0$$

admettant le multiplicateur

$$(17.) \qquad R_1(y) = (y-u_1)^{\alpha_1+m_1}(y-u_2)^{\alpha_2+m_2}\ldots(y-u_n)^{\alpha_n+m_n},$$

où $m_1, m_2, \ldots m_n$ sont des nombres entiers et positifs. Montrons comment la solution générale du dernier problème peut être déduite de celle du problème initial et réciproquement.

Supposons que le problème initial soit résolu et que nous sachions former l'équation différentielle la plus générale (1.) admettant le facteur donné (2.).

Considérons l'équation différentielle suivante:

$$d\{F(y)R(y)p(y)\}=0,$$

où $p(y)$ est une fonction entière de la variable y, à coefficients indéterminés; le degré de cette fonction sera déterminé plus loin. En divisant par $R(y)$ notre équation deviendra

$$(18.)\qquad (F\frac{\partial p}{\partial x}-F_2p)\,\partial x+(F\frac{\partial p}{\partial y}+F_1p)\,\partial y=0.$$

Cette équation admet le multiplicateur (2.). Retranchons l'équation (18.) de (1.); on aura

$$(19.)\qquad (M-F\frac{\partial p}{\partial x}+F_2p)\,\partial x+(N-F\frac{\partial p}{\partial y}-F_1p)\,\partial y=0.$$

Cette dernière équation admet aussi le multiplicateur (2.). Essayons de déterminer les coefficients du polynôme $p(y)$ de telle manière que l'expression

$$(20.)\qquad N(y)-F(y)\frac{\partial p(y)}{\partial y}-F_1(y)p(y)$$

soit divisible par

$$(21.)\qquad (y-u_1)^{m_1}(y-u_2)^{m_2}\dots(y-u_n)^{m_n}.$$

Nous obtiendrons ainsi $m_1+m_2+\cdots+m_n$ équations algébriques linéaires par rapport aux coefficients de la fonction $p(y)$; il en résulte que le degré de $p(y)$ peut être supposé égal à $m_1+m_2+\cdots+m_n-1$. Les équations algébriques linéaires que nous venons d'introduire sont faciles à former. Mais une question se pose: ces équations admettent-elles une solution finie? Si l'on essayait de traiter cette question dans le cas général, on arriverait à des formules compliquées. Mais le procédé que nous venons d'indiquer et qui permet d'augmenter d'une unité un exposant du multiplicateur montre bien que la restriction imposée plus haut est la condition nécessaire et suffisante pour que la solution soit finie. Il faut et il suffit qu'aucun des exposants entiers et négatifs ne devienne nul ou positif.

En choisissant les coefficients de la fonction $p(y)$ de telle manière que la fonction (20.) admette le multiplicateur (21.), il sera facile de montrer que l'équation (19.) admet aussi le multiplicateur (21.). On posera alors

$$(22.)\quad M_1=\frac{M-F\frac{\partial p}{\partial x}+F_2p}{(y-u_1)^{m_1}(y-u_2)^{m_2}\dots(y-u_n)^{m_n}},\quad N_1=\frac{N-F\frac{\partial p}{\partial y}-F_1p}{(y-u_1)^{m_1}(y-u_2)^{m_2}\dots(y-u_n)^{m_n}}$$

Les fonctions M_1 et N_1 ainsi définies seront entières par rapport à y. En portant les expressions trouvées (22.) dans l'équation (16.), nous obtiendrons la forme la plus générale de l'équation différentielle admettant le multiplicateur (17.).

Supposons maintenant, réciproquement, que nous connaissions la solution générale du dernier problème; montrons comment on pourrait en déduire la solution générale du problème initial.

Nous savons par hypothèse déterminer la forme la plus générale de l'équation différentielle (16.) telle que son multiplicateur soit égal à (17.). Les équations (22.) donnent alors

$$(23.)\quad \begin{cases} M = F\dfrac{\partial p}{\partial x} - F_2 p + M_1 (y-u_1)^{m_1}(y-u_2)^{m_2}\dots(y-u_n)^{m_n}, \\ N = F\dfrac{\partial p}{\partial y} + F_1 p + N_1 (y-u_1)^{m_1}(y-u_2)^{m_2}\dots(y-u_n)^{m_n}. \end{cases}$$

En portant les expressions trouvées dans l'équation (1.) nous obtiendrons la solution la plus générale du problème initial. Il est à remarquer que dans les formules (23.) les coefficients de la fonction $p(y)$ sont des fonctions arbitraires de la variable x.

4.

Solution du problème dans le cas où tous les exposants du multiplicateur sont des nombres entiers négatifs.

Supposons que l'équation différentielle (1.) admette un multiplicateur de la forme (2.), les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ étant des nombres entiers négatifs.

L'intégrale complète de l'équation (1.) s'exprime de la manière suivante

$$\int R(y)\,N(y)\,\partial y + f(x) = C.$$

La fonction sous le signe $\int$ étant une fonction rationnelle, l'intégrale s'exprime, comme on sait, par une fonction rationnelle et par un certain nombre de logarithmes. On aura donc

$$F(y)\,R(y)\,\theta(y) + \Sigma A_i \log(y-u_i) = C.$$

Dans cette équation la fonction $\theta(y)$ est une fonction algébrique entière arbitraire par rapport à la variable y, mais les coefficients de $\theta(y)$ sont

des fonctions arbitraires de la variable x. La fonction $F(y)$ est donnée par la formule (6.).

Puisque la dérivée du premier membre par rapport à x ne doit pas contenir des logarithmes, les coefficients $A_1, A_2, \dots A_n$ sont des constantes.

En différentiant et en divisant par $R(y)$, on aura

$$\Big(F\frac{\partial\theta}{\partial x} - F_2\theta - R^{-1}\Sigma\frac{A_i u_i'}{y-u_i}\Big)\partial x + \Big(F\frac{\partial\theta}{\partial y} + F_1\theta + R^{-1}\Sigma\frac{A_i}{y-u_i}\Big)\partial y = 0,$$

les fonctions $F_1(y)$ et $F_2(y)$ étant données par les formules (7.) et (8.).

Voilà comment s'exprime la solution générale de notre problème; elle contient une fonction arbitraire et des constantes arbitraires $A_1, A_2, \dots A_n$.

5.

Problème fondamental de Korkine.

Notre problème consiste, comme nous l'avons dit, à trouver la forme générale d'une équation différentielle (1.) admettant le multiplicateur (2.).

Sans donner la solution générale de ce problème on peut former une équation différentielle renfermant une fonction arbitraire et telle que son multiplicateur soit égal à (2.).

Soit $\theta(y)$ un polynôme en y, les coefficients de ce polynôme étant des fonctions arbitraires de la variable x. Considérons l'équation différentielle suivante:

$$d\{F(y)\,R(y)\,\theta(y)\} = 0.$$

En divisant par $R(y)$, on la ramènera à la forme:

$$(F\frac{\partial\theta}{\partial x} - F_2\theta)\,\partial x + (F\frac{\partial\theta}{\partial y} + F_1\theta)\,\partial y = 0, \tag{24.}$$

les fonctions $F(y)$, $F_1(y)$, $F_2(y)$ étant données par les formules (6.), (7.) et (8.).

L'équation (24.) admet le multiplicateur (2.). Il est évident que cette équation n'est pas la solution la plus générale qu'il s'agit de trouver, mais on pourra s'en servir pour simplifier le problème. Retranchons l'équation (24.) de (1.); l'équation nouvelle ainsi obtenue admettra encore le multiplicateur (2.). Mais on peut choisir la fonction arbitraire $\theta(y)$ de manière à abaisser le degré de la fonction qui multiplie ∂y et le rendre au plus

égal à $n-2$. Supposons en effet que le degré de $N(y)$ soit égal à $n-1+m$, le nombre m étant positif ou nul. On aura donc

$$N(y) = q_0 y^{n+m-1} + q_1 y^{n+m-2} + \cdots .$$

Prenons pour $\theta(y)$ un polynôme de degré m et soit

$$\theta(y) = r_0 y^m + r_1 y^{m-1} + \cdots .$$

En retranchant l'équation (24.) de (1.), on abaissera le degré de $N(y)$, si l'on fait

$$r_0 = \frac{q_0}{\Sigma\alpha + m + n}.$$

Le procédé ne s'applique pas, si $\Sigma\alpha + m + n = 0$, cas exceptionnel qui se présente lorsque la somme des exposants du multiplicateur est un nombre entier négatif ou nul. On pourra l'éviter de la manière suivante.

Observons d'abord qu'on peut faire abstraction du cas considéré dans le § 4 où tous les exposants du multiplicateur sont des nombres entiers négatifs. On pourra par conséquent, d'après ce que nous avons dit au § 3, ramener notre problème à un problème analogue dans lequel les exposants qui ne sont pas des nombres entiers négatifs sont augmentés de nombres entiers quelconques. Le cas exceptionnel deviendra un cas ordinaire.

Nous pouvons nous borner par conséquent à considérer l'équation différentielle dans laquelle le degré de $N(y)$ est égal à $n-2$. En vertu de l'équation (4.), le degré de $M(y)$ est alors égal à $n-1$. Si cette condition est remplie, nous donnerons à notre problème le nom de *problème fondamental de Korkine.*

Montrons à quoi se ramène la solution du problème fondamental de *Korkine.* Soient

$$M(y) = p_0 y^{n-1} + p_1 y^{n-2} + \cdots + p_{n-1}, \tag{25.}$$

$$N(y) = q_0 y^{n-2} + q_1 y^{n-3} + \cdots + q_{n-2}. \tag{26.}$$

Le problème revient à déterminer les coefficients $p_0, p_1, \cdots p_{n-1}$, $q_0, q_1, \cdots q_{n-2}$ en fonction de x de telle manière que l'équation différentielle (1.) admette le multiplicateur (2.).

Nous tirerons d'abord des équations (5.) les valeurs des coefficients $p_0, p_1, \cdots p_{n-1}$ en fonction linéaire de $q_0, q_1, \cdots q_{n-2}$. En portant ces valeurs dans l'équation (4.) et en égalant les coefficients des mêmes puissances

de y,*) nous obtiendrons un système de $(n-1)$ équations différentielles linéaires du premier ordre par rapport aux fonctions inconnues $q_0, q_1, \cdots q_{n-2}$. Nous appellerons *équations différentielles de Korkine* le système de ces équations linéaires. Le but de nos recherches ultérieures est de faire voir que les équations différentielles de *Korkine* peuvent être intégrées sous forme finie à l'aide d'intégrales définies. Bornons-nous pour le moment à faire remarquer que les intégrales contiendront $n-1$ constantes arbitraires. On en tire la conséquence suivante:

Supposons que nous ayons résolu le problème fondamental de *Korkine*. Pour résoudre le problème le plus général il faut ajouter à l'équation différentielle trouvée l'équation différentielle (24.) où $\theta(y)$ est un polynôme en y d'un degré arbitraire, les coefficients de ce polynôme étant des fonctions arbitraires de la variable x. Par conséquent:

La solution la plus générale du problème renferme une fonction arbitraire et un nombre fini de constantes arbitraires.

6.

Intégration des équations différentielles de Korkine dans le cas où l'un des exposants du multiplicateur est un nombre entier négatif.

Si l'équation différentielle (1.) admet le multiplicateur (2.), l'intégrale complète de cette équation peut être mise sous la forme

$$\int R(y)\,N(y)\,\partial y + f(x) = c. \tag{27.}$$

Supposons que l'un des exposants du multiplicateur (2.) soit un nombre entier négatif, $\alpha_i = -m$. Dans ce cas la fonction sous le signe dans (27.) peut être mise sous la forme

$$R(y)\,N(y) = \frac{L_m}{(y-u_i)^m} + \frac{L_{m-1}}{(y-u_i)^{m-1}} + \cdots + \frac{L_1}{(y-u_i)} + \Psi(y),$$

la fonction $\Psi(y)$ ne devenant pas infinie pour $y = u_i$. Il vient alors en intégrant

---

*) Il ne faut pas oublier que $\dfrac{M+Nu_i'}{y-u_i}$ est une fonction entière de la variable y.

$$\int R(y)\,N(y)\,\partial y =$$

$$\int \Psi(y)\,\partial y - \frac{L_m}{(m-1)(y-u_i)^{m-1}} - \frac{L_{m-1}}{(m-2)(y-u_i)^{m-2}} - \cdots + L_1 \log(y-u_i).$$

La dérivée de cette fonction par rapport à la variable x ne doit pas contenir des logarithmes, puisqu'elle est égale à $R(y)\,M(y) - f'(x)$. Le coefficient L_1 doit donc être égal à une constante. Pour trouver la valeur de L_1, il faut prendre la dérivée d'ordre $(m-1)$ de $(y-u_i)^m R(y)\,N(y)$ par rapport à y, faire $y = u_i$ et diviser le résultat par $1 \cdot 2 \cdots (m-1)$.

On aura ainsi l'équation suivante:

$$\left| \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}} (y-u_i)^m R(y)\,N(y) \right|_{y=u_i} = A_i, \tag{28.}$$

A_i étant une constante arbitraire.

En remplaçant dans l'équation (28.) $N(y)$ par son expression (26.), on obtiendra une intégrale des équations différentielles de *Korkine.**) On peut en trouver autant qu'il y a d'exposants entiers et négatifs dans (2.).

7.

Recherche d'un système complet d'intégrales des équations différentielles de Korkine.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ ceux des exposants du multiplicateur qui ne sont pas des nombres entiers negatifs.

En appliquant le procédé indiqué dans le § 3 nous pouvons ramener notre problème à un problème analogue, où les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ sont augmentés de nombres entiers positifs.

Il en résulte que les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ peuvent être rendus positifs s'ils sont réels, et s'ils sont imaginaires on pourra rendre positives leurs parties réelles. Supposons que l'équation différentielle (1.) admette le multiplicateur (2.). Son intégrale complète pourra être mise sous la forme

$$\int_{u_1}^{y} R(y)\,N(y)\,\partial y = c. \tag{29.}$$

*) Il pourrait arriver que le premier membre de (28.) devienne identiquement nul quelles que soient les valeurs de $q_0, q_1, \ldots q_{n-2}$. Mais ce cas ne saurait se présenter si $m < n$; on pourra l'éviter par conséquent en augmentant l'exposant α_i.

Pour s'en assurer, il suffit de différentier cette dernière équation; en tenant compte de l'équation (3.) on obtiendra en divisant par $R(y)$, l'équation différentielle (1.).

D'autre part il a été établi dans le § 2 que $u_1, u_2, \dots u_\mu$ sont des intégrales particulières de l'équation différentielle (1.), on doit avoir par conséquent

$$\int_{u_1}^{u_i} R(y)\, N(y)\, \partial y = A_i, \qquad (i=2,3,\dots \mu) \tag{30.}$$

les quantités A_i étant des constantes arbitraires. Si les parties réelles des exposants $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\mu$ sont positives, les intégrales définies (30.) ont une valeur finie.

En remplaçant dans les équations (30.) $N(y)$ par sa valeur (26.), on obtiendra des intégrales des équations différentielles de *Korkine*.

On ne saurait obtenir de cette manière toutes les intégrales des équations différentielles de *Korkine*. Il n'est pas permis de faire dans l'équation (29.) $y = u_{\mu+1}, u_{\mu+2}, \dots u_n$, car nos intégrales cesseraient d'être finies. Mais les exposants $\alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots \alpha_n$ étant des nombres entiers négatifs on obtiendra les autres intégrales à l'aide du procédé indiqué dans le § 6:

$$\left| \frac{\partial^{-a_j-1}}{\partial y^{-a_j-1}} (y-u_j)^{-a_j} R(y)\, N(y) \right|_{y=u_j} = A_j. \qquad (j=\mu+1, \mu+2, \dots n) \tag{31.}$$

En remplaçant dans les équations (30.) et (31.) la fonction $N(y)$ par son expression (26.), nous obtiendrons un système complet d'intégrales des équations différentielles de *Korkine*.

Remplaçons dans les équations (5.), (30.) et (31.) les fonctions $M(y)$ et $N(y)$ par leurs valeurs (25.) et (26.); tirons de ces équations les valeurs de $p_0, p_1, \dots p_{n-1}$, $q_0, q_1, \dots q_{n-2}$; portons les expressions ainsi trouvées dans les formules (25.) et (26.); nous obtiendrons alors une solution complète du problème fondamental de *Korkine*. De la solution ainsi trouvée on pourra déduire celle du problème général en appliquant le procédé indiqué dans le § 5.

Nous avons terminé notre recherche. Il nous reste à indiquer les cas où la solution ne renferme pas d'intégrales définies.

Supposons que tous les exposants soient des nombres entiers, positifs ou négatifs. Les fonctions sous le signe $\int$ étant des fonctions rationnelles,

les intégrales (30.) s'expriment au moyen de fonctions algébriques et de logarithmes. On en tire la conclusion suivante:

La solution du problème de Korkine ne contient pas d'intégrales définies, si tous les exposants du multiplicateur sont des nombres entiers, positifs ou négatifs.

Supposons maintenant que tous les exposants, sauf un seul (α_1, par ex.) soient des nombres entiers positifs. Nous aurons alors sous le signe $\int$ dans (30.) le produit d'une fonction algébrique entière par $(y-u_1)^{\alpha_1}$. Une intégrale de cette forme s'exprime aussi par une fonction entière multipliée par $(y-u_1)^{\alpha_1}$.

D'où la conclusion suivante:

La solution du problème de Korkine ne contient pas d'intégrales définies, si tous les exposants du multiplicateur, sauf un, sont des nombres entiers positifs.

On peut indiquer d'autres cas où les intégrations peuvent être effectuées.

Supposons que l'un des exposants (α_1, par ex.) soit un nombre fractionnaire, $\alpha_1 = \frac{\mu}{\gamma}$, tous les autres exposants étant des nombres entiers, positifs ou négatifs. On aura encore des intégrales de fonctions rationnelles en posant $y-u_1 = z^\gamma$.

Supposons maintenant qu'on ait deux exposants fractionnaires α_1 et α_2 ayant un même dénominateur $=2$, tous les autres exposants étant des nombres entiers, positifs ou négatifs. On aura des intégrales de fonctions rationnelles en posant $y-u_1 = z^2(y-u_2)$.

8.

Appendice au § 3.

On a montré au § 3 que la solution de notre problème peut être déduite de celle d'un problème analogue où les exposants du multiplicateur sont augmentés de certains nombres positifs, mais le résultat final que nous avons obtenu n'a pas été mis sous la forme la plus simple. Nous avons montré que la solution générale du problème initial s'obtient en ajoutant à l'équation (18.) l'équation différentielle (16.) multipliée par un certain facteur. Mais l'équation différentielle (16.) renferme dans le cas général

une fonction entière de degré arbitraire à coefficients arbitraires; d'autre part l'équation (18.) renferme aussi une fonction entière $p(y)$ de degré donné à coefficients arbitraires. Il semblerait donc que la solution générale du problème initial doive renfermer deux fonctions ayant des coefficients arbitraires. Montrons que ces deux fonctions entrent toujours de telle façon qu'on peut les remplacer par une seule fonction arbitraire.

Le problème initial s'énonce ainsi:

Trouver la forme la plus générale de l'équation différentielle

$$M(y)\,\partial x + N(y)\,\partial y = 0 \tag{1.}$$

admettant le multiplicateur

$$R(y) = (y-u_1)^{\alpha_1}(y-u_2)^{\alpha_2}\dots(y-u_n)^{\alpha_n}. \tag{2.}$$

Nous avons vu que la solution de ce problème peut être déduite de celle du problème suivant:

Trouver la forme la plus générale de l'équation différentielle

$$M_1(y)\,\partial x + N_1(y)\,\partial y = 0 \tag{16.}$$

admettant le multiplicateur

$$R_1(y) = (y-u_1)^{\alpha_1+m_1}(y-u_2)^{\alpha_2+m_2}\dots(y-u_n)^{\alpha_n+m_n}, \tag{17.}$$

où $m_1, m_2, \dots m_n$ sont des nombres entiers positifs.

Supposons que la solution fondamentale du second problème soit donnée par l'équation (16.). Pour avoir la solution la plus générale il faut, comme nous l'avons établi au § 5, ajouter à l'équation (16.) la suivante:

$$(F\frac{\partial\theta}{\partial x} - \overline{F}_2\theta)\,\partial x + (F\frac{\partial\theta}{\partial y} + \overline{F}_1\theta)\,\partial y = 0, \tag{32.}$$

où $\theta(y)$ est un polynôme de degré arbitraire à coefficients arbitraires. Quant aux fonctions $\overline{F}_1(y)$ et $\overline{F}_2(y)$, elles sont définies au moyen des formules

$$\overline{F}_1(y) = F(y)\,\Sigma\frac{\alpha_i+m_i+1}{y-u_i}, \quad \overline{F}_2(y) = F(y)\,\Sigma\frac{(\alpha_i+m_i+1)\,u_i'}{y-u_i}.$$

En multipliant la sómme des équations (16.) et (32.) par $\frac{R_1(y)}{R(y)}$ et en ajoutant à l'équation:

$$(F\frac{\partial p}{\partial x} - F_2 p)\,\partial x + (F\frac{\partial p}{\partial y} + F_1 p)\,\partial y = 0, \tag{18.}$$

nous obtiendrons, comme nous l'avons montré au § 3, la solution la plus générale du problème initial.

Mais il est facile de montrer qu'en multipliant l'équation (32.) par $\frac{R_1(y)}{R(y)}$ et en ajoutant le produit ainsi obtenu à l'équation (18.), on obtient l'équation suivante:

$$(33.) \qquad (F\frac{\partial\theta_1}{\partial x} - F_2\theta_1)\,\partial x + (F\frac{\partial\theta_1}{\partial y} + F_1\theta_1)\,\partial y = 0,$$

où

$$\theta_1(y) = p(y) + \frac{R_1(y)}{R(y)}\theta(y).$$

On en tire la conclusion suivante:

Si l'on multiplie par $\frac{R_1(y)}{R(y)}$ l'équation différentielle représentant la solution fondamentale du second problème et si l'on ajoute le produit ainsi obtenu à l'équation (33.), où $\theta_1(y)$ est un polynôme de degré arbitraire et à coefficients arbitraires, on obtiendra la solution la plus générale du problème initial.

Il se confirme donc de nouveau que la solution du problème général renferme une seule fonction arbitraire et un nombre fini de constantes arbitraires.

Mais pour que la solution du problème initial obtenue par cette méthode soit bien la solution la plus générale et non une solution particulière, il est nécessaire, ne l'oublions pas, qu'aucun des exposants entiers et négatifs du multiplicateur (2.) ne devienne nul ou positif (comp. le § 3).

9.

Le multiplicateur $(y-u)^a$.

Considérons le cas le plus simple où l'on demande de trouver la forme la plus générale d'une équation du premier ordre admettant le multiplicateur $(y-u)^a$.

Pour résoudre ce problème il faut, d'après ce que nous avons dit au § 5, former l'équation différentielle

$$(34.) \qquad d\{(y-u)^{a+1}\theta(y)\} = 0.$$

En divisant par $(y-u)^\alpha$, on obtiendra l'équation cherchée

$$(35.)\quad \{(y-u)\frac{\partial\theta}{\partial x}-(\alpha+1)u'\theta\}\,\partial x+\{(y-u)\frac{\partial\theta}{\partial y}+(\alpha+1)\theta\}\,\partial y=0,$$

où $\theta(y)$ est un polynôme de degré arbitraire et à coefficients arbitraires.

Dans le cas où α est un nombre entier négatif, la solution trouvée ne serait pas la solution la plus générale. Il faudrait alors, comme nous l'avons montré au § 4, remplacer l'équation (34.) par la suivante:

$$d\{(y-u)^{\alpha+1}\theta(y)+A\log(y-u)\}=0.$$

En divisant par $(y-u)^\alpha$, on obtiendra l'équation cherchée

$$\{(y-u)\frac{\partial\theta}{\partial x}-(\alpha+1)u'\theta-Au'(y-u)^{-\alpha-1}\}\,\partial x$$
$$+\{(y-u)\frac{\partial\theta}{\partial y}+(\alpha+1)\theta+A(y-u)^{-\alpha-1}\}\,\partial y=0,$$

A étant une constante arbitraire.

10.

Le multiplicateur $(y-u)^\alpha(y-v)^\beta$.

Traitons maintenant le problème suivant:

Trouver la forme la plus générale d'une équation différentielle du premier ordre admettant le multiplicateur $(y-u)^\alpha(y-v)^\beta$.

Supposons que les parties réelles des exposants α et β soient positives. Commençons par résoudre le problème fondamental de *Korkine*. L'équation différentielle cherchée sera de la forme

$$(36.)\qquad (py+p_1)\,\partial x+q\,\partial y=0.$$

Le problème fondamental se ramène donc à la recherche des trois fonctions p, p_1 et q. On a, en vertu des équations (5.),

$$(37.)\qquad \begin{cases} pu+p_1+qu'=0 \\ pv+p_1+qv'=0. \end{cases}$$

Et d'après le § 7, le coefficient q est donné par l'équation

$$(38.)\qquad q\int_u^v (y-u)^\alpha (y-v)^\beta \partial y = C.$$

En posant $y=u+z(v-u)$, il vient

$$\int_u^v (y-u)^\alpha (y-v)^\beta \partial y = (v-u)^{\alpha+\beta+1}\int_0^1 z^\alpha (z-1)^\beta \partial z.$$

L'intégrale définie du second membre est une constante. Nous aurons donc pour q une expression de la forme

$$q = -A(v-u)^{-\alpha-\beta-1}.$$

En portant cette valeur dans les équations (37.), on en tire les valeurs de p et de p_1

$$p = A(v-u)^{-\alpha-\beta-2}(v'-u'),$$
$$p_1 = A(v-u)^{-\alpha-\beta-2}(vu'-v'u).$$

Reste à porter les valeurs trouvées de p, p_1 et q dans l'équation (36.), ce qui donne

$$(39.)\quad A(v-u)^{-\alpha-\beta-2}\{v'(y-u)\partial x - u'(y-v)\partial x + (u-v)\partial y\} = 0.$$

Telle est la solution du problème fondamental. Pour avoir la solution la plus générale il faut ajouter à l'équation (39.) l'équation (24.), où

$$(40.)\qquad \begin{cases} F = (y-u)(y-v), \\ F_1 = (\alpha+1)(y-v)+(\beta+1)(y-u), \\ F_2 = (\alpha+1)u'(y-v)+(\beta+1)v'(y-u). \end{cases}$$

Un fait digne de remarque c'est que la solution ainsi trouvée reste vraie dans tous les cas, à l'exception des deux suivants: 1. celui où les exposants α et β sont des nombres entiers négatifs, 2. celui où $\alpha+\beta$ est égal à un nombre entier négatif. Le premier de ces cas a été traité dans le § 4. Occupons-nous maintenant du second.

On demande de trouver la forme la plus générale de l'équation différentielle du premier ordre admettant le multiplicateur $(y-u)^\alpha (y-v)^{-m-\alpha}$, *m étant un nombre entier positif.*

Pour résoudre ce problème, formons d'abord une équation différentielle admettant le facteur $(y-u)^\alpha (y-v)^{1-\alpha}$. La plus simple parmi ces équations

est celle qui représente la solution fondamentale:

$$A(v-u)^{-3}\{v'(y-u)\,\partial x-u'(y-v)\,\partial x+(u-v)\,\partial y\}=0.$$

En multipliant cette équation par $(y-v)^{m+1}$ et en ajoutant à l'équation (33.), dans laquelle on a remplacé F, F_1 et F_2 par leurs expressions (40.), où $\beta=-m-\alpha$, on obtiendra, en vertu du § 8, l'équation différentielle la plus générale admettant le multiplicateur $(y-u)^{\alpha}(y-v)^{-m-\alpha}$.

J'ai terminé l'étude du problème de M. *Korkine* et j'espère l'avoir fait d'une manière suffisamment complète.

Sur quelques applications des séries ordonnées suivant les puissances du sinus.

Par M. *F. Gomes Teixeira* à Porto.

1. Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans l'aire limitée par celle des ovales représentés par l'équation $|\sin z| = c$, où $z = x_1 + iy_1$ et $c \leqq 1$, qui a le centre à l'origine des coordonnées. Nous avons démontré dans un travail publié au tome CXVI, p. 14, de ce journal, que la fonction $f(x)$ peut être développée en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$ au moyen de la formule

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_m \sin^m x, \tag{1.}$$

où

$$A_0 = f(0),$$

$$A_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(0)}{(2n)!},$$

$$A_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \cdots + s_{2n+1}^{(n)} f'(0)}{(2n+1)!},$$

$S_{2n}^{(m)}$ représentant la somme des produits distincts des nombres

$$2^2, 4^2, 6^2, \ldots (2n-2)^2,$$

pris m à m, et $s_{2n+1}^{(m)}$ la somme des produits distincts des nombres

$$1^2, 3^2, 5^2, \ldots (2n-1)^2,$$

pris aussi m à m.

Nous allons dans ce travail faire application de cette formule à la détermination de quelques intégrales définies particulières et à la démon-

stration de quelques relations entre les nombres de *Bernoulli* et entre les nombres d'*Euler*, qui, suivant nous le croyons, n'ont pas encore été remarquées.

I.

Sur quelques intégrales définies.

2. On sait que, si la fonction $f(x)$ est développable en série de la forme (1.), on a

$$A_m = \frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{f(z)\cos z\,dz}{\sin^{m+1} z},$$

le contour de l'intégration étant une circonférence de rayon égal à β, ayant le centre à l'origine des coordonnées, telle que la fonction considérée soit holomorphe dans l'aire qu'elle limite.

En posant dans cette égalité

$$z = \beta e^{i\theta},$$

on trouve

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\beta e^{i\theta})\cos(\beta e^{i\theta})e^{i\theta}}{\sin^{m+1}(\beta e^{i\theta})}\,d\theta = \frac{2A_m\pi}{\beta},$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\beta e^{i\theta})\cos(\beta e^{i\theta})\sin^{m+1}(\beta e^{-i\theta})e^{i\theta}\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{m+1}} = \frac{A_m\pi}{2^{2m+1}\beta}.$$

En supposant maintenant que $f(0), f'(0), f''(0), \ldots$ sont des quantités réelles et en posant

$$F(i\theta) = f(\beta e^{i\theta})\cos(\beta e^{i\theta})\sin^{m+1}(\beta e^{-i\theta})e^{i\theta},$$

on trouve

$$\int_0^{2\pi} \frac{[F(i\theta) - F(-i\theta)]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{m+1}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{[F(i\theta) + F(-i\theta)]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n+1}}$$

$$= \frac{[f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(0)]\,\pi}{(2n)!\,2^{4n}\beta},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{[F(i\theta)+F(-i\theta)]d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n+2}}$$

$$=\frac{[f^{(2n+1)}(0)+s^{(1)}_{2n+1}f^{(2n-1)}(0)+\cdots+s^{(n)}_{2n+1}f'(0)]\pi}{(2n+1)!\,2^{4n+2}\beta}.$$

On peut écrire ces égalités *symboliquement* de la manière suivante:

$$\int_0^{2\pi} \frac{[F(i\theta)+F(-i\theta)]d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n+1}}$$

$$=\frac{f^2(0)[f^2(0)+2^2][f^2(0)+4^2]\ldots[f^2(0)+(2n-2)^2]}{(2n)!\,2^{4n}}\cdot\frac{\pi}{\beta},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{[F(i\theta)+F(-i\theta)]d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n+2}}$$

$$=\frac{f(0)[f^2(0)+1^2][f^2(0)+3]\ldots[f^2(0)+(2n-1)^2]}{(2n+1)!\,2^{4n+2}}\cdot\frac{\pi}{\beta}$$

3. Nous allons considérer maintenant quelques cas particuliers. Soit premièrement

$$f(x)=\frac{1}{\cos x}.$$

On a

$$\frac{1}{\cos x}=1+\sum_{n=1}^{x}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\sin^{2n}x,$$

et, par conséquent,

$$\int_s \frac{dz}{\sin^{2n+1}z}=2i\pi\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n},$$

$$\int_s \frac{dz}{\sin^{2n}z}=0;$$

ou, en posant $z=\beta e^{i\theta}$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^{2n+1}(\beta e^{-i\theta})e^{i\theta}d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n+1}}=\frac{1.3\ldots(2n-1)\pi}{2^{4n+1}.2.4\ldots 2n\beta},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^{2n}(\beta e^{-i\theta})\,e^{i\theta}d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n}}=0.$$

Si l'on remarque maintenant qu'on a

$$\sin(\beta e^{-i\theta}) = \sin(\beta\cos\theta)\frac{e^{-\beta\sin\theta}+e^{\beta\sin\theta}}{2} + i\cos(\beta\cos\theta)\frac{e^{-\beta\sin\theta}-e^{\beta\sin\theta}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{\frac{1}{2}}(\cos\omega + i\sin\omega),$$

où

$$\omega = \text{arc tang}\frac{e^{-\beta\sin\theta}-e^{\beta\sin\theta}}{e^{-\beta\sin\theta}+e^{\beta\sin\theta}}\cot(\beta\cos\theta),$$

on peut encore écrire

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos[\theta+(2n+1)\omega]+i\sin[\theta+(2n+1)\omega]d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{2\beta\sin\theta}\right]^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{3n}.n!}\cdot\frac{\pi}{\beta},$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos[\theta+(2n+1)\omega]d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{3n}.n!}\cdot\frac{\pi}{\beta},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin[\theta+(2n+1)\omega]d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{\frac{2n+1}{2}}} = 0.$$

On trouve de la même manière

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta+2n\omega)d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{n}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\theta+2n\omega)d\theta}{\left[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}\right]^{n}} = 0.$$

4. Considérons maintenant la fonction

$$f(x) = x^{2k}.$$

On a vu, dans le travail précédemment rapporté, que le développement de x^{2k} en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$ est donné par la formule

$$x^{2k} = \sin^{2k}x\left[1 + \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{S_{2n}^{(n-k)}}{(2k+1)(2k+2)\ldots 2n}\sin^{2(n-k)}x\right].$$

Nous avons donc

$$\int_s\frac{z^{2k}\cos z\,dz}{\sin^{2n+1}z} = 2i\pi\,\frac{S_{2n}^{(n-k)}}{(2k+1)(2k+2)\ldots 2n},$$

$$\int_s\frac{z^{2k}\cos z\,dz}{\sin^{2n}z} = 0.$$

Mais

$$\int_s \frac{z^{2k}\cos z\,dz}{\sin^m z} = \frac{2k}{m-1}\int_s \frac{z^{2k-1}dz}{\sin^{m-1}z}.$$

Donc

$$\int_s \frac{z^{2k-1}dz}{\sin^{2n}z} = \frac{2i\pi\, S_{2n}^{(n-k)}}{2k(2k+1)(2k+2)\ldots(2n-1)},$$

$$\int_s \frac{z^{2k-1}dz}{\sin^{2n-1}z} = 0.$$

En posant maintenant $z=\beta e^{i\theta}$ et en employant ensuite une analyse semblable à celle qu'on a appliquée au cas considéré dans le n° précédent, on trouve les résultats suivants:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2(k\theta+n\omega)\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^n} = \frac{S_{2n}^{(n-k)}}{2^{2n-1}.2k(2k+1)\ldots(2n-1)}\cdot\frac{\pi}{\beta^{2k}},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2(k\theta+n\omega)\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^n} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos[2k\theta+(2n-1)\omega]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{\frac{2n-1}{2}}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin[2k\theta+(2n-1)\omega]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^{\frac{2n-1}{2}}} = 0.$$

Il convient de remarquer le cas particulier où $k=1$. On a alors

$$S_{2n}^{(n-1)} = 2^2.4^2.6^2\ldots(2n-2)^2,$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2(\theta+n\omega)\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta}-2\cos 2(\beta\cos\theta)+e^{-2\beta\sin\theta}]^n} = \frac{[(n-1)!]^2}{2(2n-1)!}\cdot\frac{\pi}{\beta^2}.$$

5. On considère de la même manière la fonction x^{2k+1}, dont le développement ordonné suivant les puissances de $\sin x$, donné dans le travail précédemment indiqué, est le suivant:

$$x^{2k+1} = \sin^{2k+1}x\left[1+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{S_{2n+1}^{(n-k)}}{(2k+2)(2k+3)\ldots(2n+1)}\sin^{2(n-k)}x\right].$$

On a d'abord

$$\int_s \frac{z^{2k+1}\cos z\,dz}{\sin^{2n+2}z} = 2i\pi \frac{s_{2n+1}^{(n-k)}}{(2k+2)(2k+3)\dots(2n+1)},$$

$$\int_s \frac{z^{2k+1}\cos z\,dz}{\sin^{2n+1}z} = 0.$$

La première égalité donne ensuite

$$\int_s \frac{z^{2k}\,dz}{\sin^{2n+1}z} = \frac{2n+1}{2k+1}\int_s \frac{z^{2k+1}\cos z\,dz}{\sin^{2n+2}z} = 2i\pi \frac{(2n+1)s_{2n+1}^{(n-k)}}{(2k+1)(2k+2)\dots(2n+1)},$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{(2k+1)i\theta}\sin^{2n+1}(\beta e^{-i\theta})\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{2n+1}} = \frac{(2n+1)s_{2n+1}^{(n-k)}}{2^{4n+1}(2k+1)(2k+2)\dots(2n+1)}\cdot\frac{\pi}{\beta^{2k+1}}.$$

On trouve, au moyen de cette égalité, les résultats suivants:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos[(2k+1)\theta + (2n+1)\omega]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{s_{2n+1}^{(n-k)}}{2^{2n}(2k+1)(2k+2)\dots 2n}\cdot\frac{\pi}{\beta^{2k+1}},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin[(2k+1)\theta + (2n+1)\omega]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{\frac{2n+1}{2}}} = 0.$$

On trouve aussi

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos[(2k+1)\theta + 2n\omega]\,d\theta}{[e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{n}} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin[(2k+1)\theta + 2n\omega]\,d\theta}{(e^{2\beta\sin\theta} - 2\cos 2(\beta\cos\theta) + e^{-2\beta\sin\theta}]^{n}} = 0.$$

Les formules obtenues au n°. 3 sont comprises entre celles qu'on vient de trouver, comme on peut le voir en posant $k=0$ et en ayant égard à l'égalité

$$s_{2n+1}^{(n)} = 3^2.5^2.7^2\dots(2n-1)^2.$$

II.

Sur quelques relations entre les nombres de Bernoulli et entre les nombres d'Euler.

6. Appliquons la formule (1.) à la fonction $\frac{x}{\sin x}$.

Comme on a

$$f(0)=1,\ f''(0)=2(2-1)B_1,\ f^4(0)=2(2^3-1)B_3,\ \ldots$$
$$f^{(2n)}(0)=2(2^{2n-1}-1)B_{2n-1}$$

et

$$f'(0)=f'''(0)=\cdots=f^{(2n-1)}(0)=0,$$

$B_1, B_3, B_5, \ldots$ **représentant les** *nombres de Bernoulli,* **on trouve**

$$x=\sin x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^{2n-1}-1)B_{2n-1}+S_{2n}^{(1)}(2^{2n-3}-1)B_{2n-3}+\cdots+S_{2n}^{(n-1)}(2-1)B_1}{(2n)!}\sin^{2n+1}x.$$

Mais, on a

$$x=\sin x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n(2n+1)}\sin^{2n+1}x.$$

En comparant ces deux résultats, on obtient la relation de récurrence entre les *nombres de Bernoulli:*

$$(2.)\quad \begin{cases}(2^{2n-1}-1)B_{2n-1}+S_{2n}^{(1)}(2^{2n-3}-1)B_{2n-3}+\cdots+S_{2n}^{(n-1)}(2-1)B_1\\ \qquad =\dfrac{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2}{2(2n+1)}.\end{cases}$$

Il résulte immédiatement de cette identité la représentation suivante des nombres considérés au moyen d'un déterminant:

$$B_{2n-1}=\frac{1}{2(2^{2n-1}-1)}\begin{vmatrix} u_{2n-1} & S_{2n}^{(1)} & S_{2n}^{(2)} & \vdots & S_{2n}^{(n-1)}\\ u_{2n-3} & 1 & S_{2(n-1)}^{(1)} & \vdots & S_{2(n-1)}^{(n-2)}\\ u_{2n-5} & 0 & 1 & \vdots & S_{2(n-2)}^{(n-3)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ u_1 & 0 & 0 & \vdots & 1\end{vmatrix},$$

où

$$u_{2n-1}=\frac{[1.3\ldots(2n-1)]^2}{2n+1},\quad u_{2n-3}=\frac{[1.3\ldots(2n-3)]^2}{2n-1},\ldots,\quad u_1=\frac{1}{3}.$$

En posant

$$B'_{2n-1}=(2^{2n-1}-1)\,B_{2n-1},\ B'_{2n-3}=(2^{2n-3}-1)\,B_{2n-3},\dots$$

on peut écrire *symboliquement* la formule (2.) de la manière suivante:

$$B'[B'^2+2^2]\,[B'^2+4^2]\dots[B'^2+(2n-2)^2]=\frac{1}{2}\,u_{2n-1},$$

où on doit remplacer, après les multiplications, les exposants des puissances de B' par des indices.

7. En partant de la fonction tang x et en employant une analyse semblable, on trouve une autre relation de récurrence entre les nombres de *Bernoulli* et une autre expression au moyen d'un déterminant des mêmes nombres, où figurent les quantités représentées par $s^{(m)}_{2n+1}$.

On a, en effet,

$$f'(0)=\frac{2(2^2-1)}{1}B_1,\quad f'''(0)=\frac{2^3(2^4-1)}{2}B_3,\dots f^{(2n+1)}(0)=\frac{2^{2n+1}(2^{2n+2}-1)}{n+1}B_{2n+1},$$

$$f(0)=f''(0)=\dots=f^{(2n)}(0)=0,$$

et, par conséquent,

$$\text{tang } x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}\dfrac{2^{2n+2}-1}{n+1}B_{2n+1}+2^{2n-1}\dfrac{2^{2n}-1}{n}s^{(1)}_{2n+1}B_{2n-1}+\dots+2\dfrac{2^2-1}{1}s^{(n)}_{2n+1}B_1}{(2n+1)!}\sin^{2n+1}x.$$

Mais, d'un autre côté, on a

$$\text{tang } x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4\dots2n}\sin^{2n+1}x.$$

En comparant les deux développements on trouve la relation de récurrence

$$(3.)\quad\begin{cases}2^{2n+1}.\dfrac{2^{2(n+1)}-1}{n+1}B_{2n+1}+2^{2n-1}s^{(1)}_{2n+1}\dfrac{2^{2n}-1}{n}B_{2n-1}+\dots+2\,s^{(n)}_{2n+1}\dfrac{2^2-1}{1}B_1\\ \qquad=[1.3.5\dots(2n-1)]^2(2n+1),\end{cases}$$

dont on tire

$$B_{2n+1}=\frac{n+1}{2^{2n+1}(2^{2(n+1)}-1)}\begin{vmatrix} v_{2n-1} & s^{(1)}_{2n+1} & s^{(2)}_{2n+1} & \vdots & s^{(n)}_{2n+1}\\ v_{2n-3} & 1 & s^{(1)}_{2n-1} & \vdots & s^{(n-1)}_{2n-1}\\ v_{2n-5} & 0 & 1 & \vdots & s^{(n-2)}_{2n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 1\end{vmatrix},$$

où

$$v_{2n-1}=[1.3.5\ldots(2n-1)]^2(2n+1),\quad v_{2n-3}=[1.3.5\ldots(2n-3)]^2(2n-1),\ldots.$$

En posant

$$B''_{2n+1}=\frac{2^{2n+1}(2^{2(n+1)}-1)}{n+1}B_{2n+1},\qquad B''_{2n-1}=\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{n}B_{2n-1},\ldots$$

on peut écrire, *symboliquement*, la relation (3.) de la manière suivante:

$$B''[B''^2+1^2][B''^2+3^2]\ldots[B''^2+(2n-1)^2]=v_{2n-1},$$

où on doit, comme précédemment, remplacer, après les multiplications, les exposants de B'' par des indices.

8. On peut trouver encore une autre relation intéressante entre les nombres de *Bernoulli* en partant du développement suivant de $x\cot x$, qu'on obtient au moyen de la formule (1.):

$$x\cot x=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n-1}+S_{2n}^{(1)}2^{2n-2}B_{2n-3}+\cdots+S_{2n}^{(n-1)}2^2B_1}{(2n)!}\sin^{2n}x$$

et en le comparant au développement suivant:

$$x\cot x=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n+1)}\sin^{2n}x,$$

que nous allons démontrer.

Posons

$$x\cot x=\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}\sin^{2n}x$$

et, par conséquent,

$$\frac{z\cot z\cos z}{\sin^{2n+1}z}=\frac{\cos z}{\sin^{2n+1}z}\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}\sin^{2n}z,$$

et intégrons les deux membres de cette égalité le long d'une circonférence s ayant le centre à l'origine des coordonnées et dont le rayon soit assez petit pour que cette série soit convergente dans l'aire que la circonférence limite. Puisqu'on a

$$\int_s\frac{\cos z\,dz}{\sin^m z}=0,\quad (m\gtrless 1)$$

et

$$\int_s\frac{\cos z\,dz}{\sin z}=2i\pi,$$

on trouve ainsi

$$A_{2n}=\frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{z\cot z\cos z\,dz}{\sin^{2n+1}z}.$$

Mais, nous avons

$$\int_s \frac{z\cot z\cos z\,dz}{\sin^{2n+1}z}=\int \frac{z\,dz}{\sin^{2n+2}z}-\int \frac{z\,dz}{\sin^{2n}z};$$

et, puisque

$$z^2=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3\ldots(2n-1)}\cdot\frac{1}{n}\sin^{2n}z,$$

et, par conséquent

$$z=\cos z\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3\ldots(2n-1)}\sin^{2n-1}z,$$

nous avons aussi

$$\int_s \frac{z\,dz}{\sin^{2n}z}=2i\pi\frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3\ldots(2n-1)},$$

$$\int_s \frac{z\,dz}{\sin^{2n+2}z}=2i\pi\frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n+1)}.$$

Donc

$$A_{2n}=\frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{z\cot z\cos z\,dz}{\sin^{2n+1}z}=-\frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3.5\ldots(2n+1)}.$$

Le deuxième développement de $x\cot x$ précédemment indiqué résulte immédiatement de cette égalité, et, en le comparant au premier, on trouve la relation

$$(4.)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2^{2n}B_{2n-1}+S_{2n}^{(1)}2^{2(n-1)}B_{2n-3}+\cdots+S_{2n}^{(n-1)}2^2B_1 \\ \qquad =\dfrac{(2.4.6\ldots(2n-2))^2 2n}{2n+1}, \end{array}\right.$$

qui donne

$$B_{2n-1}=\frac{1}{2^{2n}}\begin{vmatrix} u_{2n-2} & S_{2n}^{(1)} & S_{2n}^{(2)} & \vdots & S_{2n}^{(n-1)} \\ u_{2n-4} & 1 & S_{2(n-1)}^{(1)} & \vdots & S_{2(n-1)}^{(n-2)} \\ u_{2n-6} & 0 & 1 & \vdots & S_{2(n-2)}^{(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix},$$

où

$$u_{2n-2}=\frac{(2.4\ldots(2n-2))^2 2n}{2n+1},\quad u_{2n-4}=\frac{(2.4\ldots(2n-4))^2 2(n-1)}{2n-1},\ \ldots\ u_0=\frac{2}{3}.$$

9. On peut trouver pour les *nombres d'Euler* des relations analogues à celles qu'on vient d'obtenir pour les nombres de *Bernoulli*.

En effet, en représentant ces nombres par $E_2, E_4, E_6, \ldots$, on a

$$(5.) \qquad \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{E_2}{2!}x^2 + \frac{E_4}{4!}x^4 + \frac{E_6}{6!}x^6 + \cdots;$$

et, par conséquent, en appliquant la formule (1.) à la fonction $\frac{1}{\cos x}$, on trouve

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \sum_{n=1}^{x} \frac{E_{2n} + S_{2n}^{(1)} E_{2(n-1)} + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} E_2}{(2n)!} \sin^{2n} x.$$

Mais, d'un autre côté, on a

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2 x + \cdots + \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n}\sin^{2n} x + \cdots.$$

Donc nous avons la relation de récurrence suivante entre les nombres d'*Euler*:

$$(6.) \qquad E_{2n} + S_{2n}^{(1)} E_{2(n-1)} + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} E_2 = [1.3.5 \ldots (2n-1)]^2,$$

dont il résulte l'expression, au moyen d'un déterminant, des mêmes nombres:

$$E_{2n} = \begin{vmatrix} a_{2n-1} & S_{2n}^{(1)} & S_{2n}^{(2)} & \vdots & S_{2n}^{(n-1)} \\ a_{2n-3} & 1 & S_{2(n-1)}^{(1)} & \vdots & S_{2(n-1)}^{(n-2)} \\ a_{2n-5} & 0 & 1 & \vdots & S_{2(n-2)}^{(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix},$$

où

$$a_{2n-1} = [1.3.5 \ldots (2n-1)]^2, \qquad a_{2n-3} = [1.3.5 \ldots (2n-3)]^2, \ldots$$

10. Considérons encore la fonction $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, pour trouver une autre relation entre les nombres d'*Euler*, où figurent les nombres représentés par $s_{2n+1}^{(m)}$.

Puisque

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = E_2 x + \frac{E_4}{3!}x^3 + \frac{E_6}{5!}x^5 + \cdots$$

on a

$$f(0) = 0,\ f'(0) = E_2,\ f''(0) = 0, \ldots f^{(2n)}(0) = 0,\ f^{(2n+1)}(0) = E_{2n+2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sum_{n=0}^{x} \frac{E_{2n+2} + s^{(1)}_{2n+1} E_{2n} + \cdots + s^{(n)}_{2n+1} E_2}{(2n+1)!} \sin^{2n+1} x.$$

Mais on a aussi

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sin x + \sin^3 x + \sin^5 x + \cdots.$$

Donc

(7.) $$E_{2n+2} + s^{(1)}_{2n+1} E_{2n} + \cdots + s^{(n)}_{2n+1} E_2 = (2n+1)!$$

et

$$E_{2n+2} = \begin{vmatrix} (2n+1)! & s^{(1)}_{2n+1} & s^{(2)}_{2n+1} & \vdots & s^{(n)}_{2n+1} \\ (2n-1)! & 1 & s^{(1)}_{2n-1} & \vdots & s^{(n-1)}_{2n-1} \\ (2n-3)! & 0 & 1 & \vdots & s^{(n-2)}_{2n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{vmatrix},$$

Les formules (6.) et (7.) peuvent être écrites symboliquement de la manière suivante:

$$E^2[E^2+2^2][E^2+4^2]\ldots[E^2+(2n-2)^2] = [1.3\ldots(2n-1)]^2,$$
$$E^2[E^2+1^2][E^2+3^2]\ldots[E^{2n}+(2n-1)^2] = (2n+1)!$$

11. La méthode qu'on vient d'employer pour trouver quelques relations entre les nombres de *Bernoulli* et d'*Euler* donne aussi des relations entre les nombres représentés précédemment par $S^{(m)}_{2n}$ et $s^{(m)}_{2n+1}$. Nous indiquerons ici la suivante

$$s^{(n)}_{2n+1} - s^{(n-1)}_{2n+1} + s^{(n-2)}_{2n+1} - \cdots \pm 1 = 0,$$

qui résulte d'appliquer les formules (1.), (2.) et (3.) à la fonction $\sin x$, et la suivante:

$$S^{(n)}_{2(n+1)} - S^{(n-1)}_{2(n+1)} + S^{(n-2)}_{2(n+1)} - \cdots \pm 1 = [1.3\ldots(2n-1)]^2(2n+1),$$

qui résulte d'appliquer les mêmes formules à la fonction $\cos x$ et de comparer le résultat au développement

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{1.2.2^2}\sin^4 x - \frac{1.3}{1.2.3.2^3}\sin^6 x \cdots.$$

Berichtigung betr. die Auflösung der Ikosaedergleichung durch elliptische Modulfunktionen.

In der Formel (3.) auf S. 154 des 129. Bandes muß es statt $q^{2/5}$ heißen $-q^{3/5}$, also

$$x = -q^{3/5} \frac{\vartheta_1\left(\frac{2ik'\pi}{k},\ q^5\right)}{\vartheta_1\left(\frac{ik'\pi}{k},\ q^5\right)}.$$

Der Fehler befindet sich bereits in meinen Vorlesungen über das Ikosaeder S. 132; in meinen früheren Publikationen, sowie in *Klein-Fricke:* Modulfunktionen (Bd. 2, S. 383), sind die Formeln richtig. Vergl. *Scheibner* „Zur Auflösung der Ikosaedergleichung“ in den Berichten der math.-phys. Klasse der kgl. sächsischen Gesellschaft d. W. vom 4. Dezember 1905.

Klein.

Über zyklische Gleichungen.

Von Herrn *F. Mertens* in Wien.

1.

In dem folgenden ist ein Beweis des *Kronecker*schen Satzes*) enthalten, daß die Wurzeln jeder rationalzahligen zyklischen Gleichung rationale Verbindungen von Einheitswurzeln sind. Derselbe ist eine Umarbeitung und Ergänzung eines in den Sitzungsberichten der Wiener k. Akademie**) mitgeteilten Beweises.

Die ersten Beweise des genannten Satzes verdankt man den Herren *H. Weber****) und *D. Hilbert.*†)

2.

Unter einer zyklischen Funktion von n Größen $x_0, x_1, \ldots$ soll eine ganze rationalzahlige Funktion derselben verstanden werden, welche bei der Ersetzung von $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ durch $x_1, x_2, \ldots x_0$ identisch ungeändert bleibt. Eine rationalzahlige Gleichung wird zyklisch genannt, wenn die zyklischen Funktionen ihrer Wurzeln bei einer bestimmten Anordnung derselben, welche schon in der Angabe dieser Wurzeln angedeutet wird, rationale Zahlen sind.

Sind $x_0, x_1, \ldots$ die Wurzeln einer zyklischen Gleichung, $\omega, \omega', \ldots$ die von 1 verschiedenen n-ten Einheitswurzeln und setzt man

$$L(x) = x_0 + x^{n-1} x_1 + x^{n-2} x_2 + \cdots + x x_{n-1},$$

so sind $L(\omega), L(\omega'), \ldots$ die *Lagrange*schen Resolventen der Gleichung.

*) Monatsberichte der Berliner Akademie 1853.

**) Sitzungsberichte, mathem.-naturw. Klasse, Bd. CXIV.

***) Acta mathem., Bd. 8. Lehrbuch der Algebra, Abschnitt 23.

†) Nachrichten der Ges. der Wiss. in Göttingen, 1896, Heft 1. Die Theorie der alg. Zahlkörper, Kap. XXIII. Jahresbericht d. Mathem. Vereinigung IV, 1894/95.

Ein Potenzprodukt

$$L(x)^{a_1} L(x^2)^{a_2} \dots L(x^{n-1})^{a_{n-1}},$$

dessen Exponenten der Kongruenz

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + (n-1)\, a_{n-1} \equiv 0 \pmod{n}$$

genügen und welches allgemein mit $P(x)$ bezeichnet werde, ändert sich bei einer zyklischen Vertauschung von $x_0, x_1, \dots$ nur um eine durch $x^n - 1$ teilbare ganze Funktion von x. Sein Rest in bezug auf den Teiler $x^n - 1$ hat demnach zyklische Funktionen von $x_0, x_1, \dots$ zu Koeffizienten bei $x^0, x, \dots x^{n-1}$ und ist demzufolge eine ganze rationalzahlige Funktion von x.

Hiernach sind bei einer zyklischen Gleichung alle Ausdrücke von der Form

$$\mathfrak{A} = \Sigma\, \omega^k P(\omega),$$

in welchen die Summe auf alle primitiven n-ten Einheitswurzeln ω zu beziehen ist, und die Wurzelsumme $L(1)$ rationale Zahlen.

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Denn es seien I' irgend eine zyklische Funktion von $x_0, x_1, \dots$ und ω eine beliebige primitive n-te Einheitswurzel. Ersetzt man x_i durch

$$\frac{1}{n}(L(1) + \omega^i L(\omega) + \cdots + \omega^{(n-1)i} L(\omega^{n-1})),$$

so erscheint I' als Summe von Ausdrücken von der Form

$$\vartheta(\omega)\, L(\omega)^{a_1} L(\omega^2)^{a_2} \dots L(\omega^{n-1})^{a_{n-1}},$$

wo $\vartheta(\omega)$ eine ganze rationalzahlige Funktion von ω und $L(1)$ bezeichnet. Da diese Darstellung in $x_0, x_1, \dots$ identisch ist und der vorstehende Ausdruck bei k-maliger zyklischer Vertauschung dieser Größen in

$$\vartheta(\omega)\, \omega^{k(a_1 + 2a_2 + \cdots + (n-1)a_{n-1})} L(\omega)^{a_1} \dots L(\omega^{n-1})^{a_{n-1}}$$

übergeht, so fallen aus der Summe der Resultate, welche den Werten $0, 1, \dots n-1$ von k entsprechen, alle Glieder heraus, in welchen $a_1 + 2a_2 + \cdots$ kein Vielfaches von n ist, und I' nimmt die Gestalt

$$I' = \Sigma\, \vartheta(\omega)\, P(\omega)$$

an. Diese Gleichung gilt für jede primitive n-te Einheitswurzel ω. Summiert man daher über alle diese Wurzeln und dividiert durch $\varphi(n)$, so erscheint I' als rationalzahlige linear-homogene Funktion von Ausdrücken $L(1)^m\, \mathfrak{A}$.

Sind $L'(\omega), L''(\omega)$ die Resolventen zweier zyklischen Gleichungen n-ten Grades

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0,$$

und stellt man die Gleichung desselben Grades auf, deren Wurzelsumme eine beliebige rationale Zahl und deren Resolventen die Produkte $L'(\omega)\, L''(\omega)$ sind, so erhält man eine zyklische Gleichung, welche nach *Kronecker**) aus den vorstehenden Gleichungen zusammengesetzt heißt.

Ist

$$f_1 = 0$$

eine zyklische Gleichung n-ten Grades mit von 0 verschiedenen *Lagrange*schen Resolventen und

$$f_2 = 0$$

irgend eine zyklische Gleichung desselben Grades, so gibt es eine zyklische Gleichung n-ten Grades mit beliebiger rationaler Wurzelsumme, welche mit der ersten Gleichung zusammengesetzt die zweite ergibt. Sind $L'(\omega), L''(\omega)$ die Resolventen der gegebenen Gleichungen, so genügt es, diejenige Gleichung n-ten Grades aufzustellen, deren Resolventen die Quotienten $\frac{L''(\omega)}{L'(\omega)}$ sind und deren Wurzelsumme mit der der zweiten Gleichung übereinstimmt.

3.

Es seien $x_0, x_1, \ldots$ die Wurzeln einer zyklischen Gleichung n-ten Grades, deren Resolventen alle von 0 verschieden sind, und $n = \mu\nu$. Sind $u_0, u_1, \ldots$ Unbestimmte und setzt man

$$U_i = \Sigma x_{h+i}\, u_h, \qquad (h = 0, 1, \ldots n-1)$$

so können die Ausdrücke

$$U_a - U_b, \qquad \Sigma \omega^{-h\nu}\, U_{h\nu} \qquad (h = 0, 1, \ldots \mu - 1)$$

nicht identisch in $u_0, u_1, \ldots$ verschwinden, wo a, b nach n inkongruente Zahlen und ω eine beliebige von 1 verschiedene n-te Einheitswurzel bezeichnen. Denn der erste Ausdruck geht nach Ersetzung von $u_0, u_1, \ldots$ durch die Potenzen $1, \beta^{-1}, \beta^{-2}, \ldots$ einer primitiven n-ten Einheitswurzel β in die von 0 verschiedene Größe $(\beta^a - \beta^b)\, L(\beta)$, der zweite nach Ersetzung

*) Sitzungsberichte der Akad. d. Wiss. zu Berlin 1882.

von $u_0, u_1 \ldots$ durch $1, \omega^{-1}, \omega^{-2}, \ldots$ in $\mu L(\omega)$ über. Dasselbe gilt von dem Ausdrucke

$$\Sigma \omega^{-h} U_h = L(\omega) \Sigma \omega^h u_h. \qquad (h=0,1,\ldots n-1)$$

Es können daher für $u_0, u_1, \ldots$ ganze Zahlen $c_0, c_1, \ldots$ gesetzt werden, für welche sowohl die Größen

$$\xi_i = \Sigma c_h x_{h+i} \qquad (h=0,1,\ldots n-1)$$

ungleich, als auch die Ausdrücke

$$L'(\omega) = \xi_0 + \omega^{-1}\xi_1 + \cdots + \omega^{-n+1}\xi_{n-1},$$
$$\Lambda(\omega^\nu) = \xi_0 + \omega^{-\nu}\xi_\nu + \cdots + \omega^{-(\mu-1)\nu}\xi_{n-\nu}$$

von 0 verschieden ausfallen.

Setzt man

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} = g(x),$$

so sind $\xi_0, \xi_1, \ldots$ auf Grund der Gleichungen

$$L'(\omega) = g(\omega) L(\omega),$$
$$\xi_0 + \xi_1 + \cdots = (c_0 + c_1 + \cdots)(x_0 + x_1 + \cdots)$$

die Wurzeln einer zyklischen Gleichung n-ten Grades, deren Diskriminante und Resolventen von 0 verschieden sind. Es gibt demnach eine ganze rationalzahlige Funktion $\Theta(x)$, welche den Gleichungen

$$\xi_{h+1} = \Theta(\xi_h) \qquad (h=0,1,\ldots n-1)$$

genügt.

Es sei insbesondere n eine Potenz 2^ϱ von 2, $\nu = 2$, $\mu = \frac{1}{2} n$ und $L(-1)^2$ ein Quadrat.

Die Resolvente $L'(-1)$ ist der Gleichung

$$L'(-1) = g(-1) L(-1)$$

zufolge rational.

Die Größen

$$\xi_0, \xi_2, \xi_4, \ldots \xi_{n-2}$$

sind Wurzeln einer zyklischen Gleichung vom Grade $\frac{n}{2}$. Denn es sei I' irgend eine zyklische Funktion derselben und I'_1 der Ausdruck, in welchen I' nach Ersetzung von $\xi_0, \xi_2, \ldots$ durch $\xi_1, \xi_3, \ldots$ übergeht. Die Funktionen

$$I' + I'_1, \qquad (I' - I'_1) L'(-1)$$

sind zyklisch in $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ und infolgedessen rationale Zahlen. Daher ist auch Γ eine rationale Zahl.

Auf Grund der Gleichung

$$\xi_1 + \omega^{-2}\xi_3 + \cdots = \Theta(\xi_0) + \omega^{-2}\Theta(\xi_2) + \cdots$$

hat der Ausdruck

$$L'(\omega)\, A^{\frac{1}{2}n-1}$$

zyklische Koeffizienten in $\xi_0, \xi_2, \ldots$ und ist demzufolge eine ganze rationalzahlige Funktion von ω. Dasselbe gilt von $A(\omega^2)^{\frac{1}{2}n}$. Hiernach ist $\frac{L'(\omega)}{A(\omega^2)}$ und daher auch $\frac{L(\omega)}{A(\omega^2)}$ für jede von 1 verschiedene n-te Einheitswurzel ω eine rationalzahlige ganze Funktion $\vartheta(\omega)$ von ω und man hat

$$L(\omega) = \vartheta(\omega)\, A(\omega^2).$$

Ähnliches gilt, wenn λ eine ungerade Primzahl, $n = \lambda^\varrho$ und $L(\alpha)^\lambda$ die λ-te Potenz einer Zahl $\psi(\alpha)$ in α ist, wo α eine primitive λ-te Einheitswurzel bezeichnet.

Man darf

$$L(\alpha) = \psi(\alpha)$$

setzen und es seien $R(x)$, $R_1(x)$ die Reste der Ausdrücke

$$L(x)\, \Pi L(x^s)^{s'}, \quad \psi(x)\, \Pi \psi(x^s)^{s'}$$

in bezug auf den Teiler $x^\lambda - 1$, wo das Produktzeichen auf die Werte $1, 2, \ldots \lambda - 1$ von s zu beziehen und $ss' \equiv 1 \pmod{\lambda}$ ist. $R(x)$ hat zyklische Funktionen und daher rationale Zahlen zu Koeffizienten und es ist

$$R(\alpha)^\lambda = R_1(\alpha)^\lambda.$$

Setzt man

$$R(\alpha) = \alpha^c\, R_1(\alpha),$$

so ergibt sich

$$\frac{R(\alpha^m)}{R_1(\alpha^m)} = \alpha^{cm}.$$

Andrerseits ist

$$\Pi \frac{L(\alpha^{ms})^{s'}}{\psi(\alpha^{ms})^{s'}} = \Pi \Big(\frac{L(\alpha^s)}{\psi(\alpha^s)}\Big)^{[ms']} = \Pi \frac{L(\alpha^s)^{ms'}}{\psi(\alpha^s)^{ms'}},$$

wo $[ms']$ den Rest von ms' nach dem Modul λ bezeichnet, und demzufolge

$$\frac{R(\alpha^m)}{R_1(\alpha^m)} \frac{\psi(\alpha^m)}{L(\alpha^m)} = \Big(\frac{R(\alpha)}{R_1(\alpha)} \frac{\psi(\alpha)}{L(\alpha)}\Big)^m.$$

Hieraus ergibt sich

$$L(\alpha^m) = \psi(\alpha^m).$$

Ist nun $\varrho = 1$, so sind die Wurzeln $x_0, x_1, \ldots$ rational.

Ist dagegen $\varrho > 1$, so setze man $\nu = \lambda$, $\mu = \frac{1}{\lambda} n$.

Die Größen

$$\xi_0, \xi_\lambda, \ldots \xi_{(\mu-1)\lambda}$$

sind Wurzeln einer zyklischen Gleichung vom Grade $\frac{1}{\lambda} n$. Denn es seien Γ irgend eine zyklische Funktion derselben und $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_{\lambda-1}$ die Werte, welche Γ bei der Permutation $\left(\begin{smallmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots \end{smallmatrix}\right)$ und ihren Potenzen annimmt. Die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
&\Gamma + \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_{\lambda-1}, \\
&(\Gamma + \alpha^{-1}\Gamma_1 + \cdots + \alpha^{-\lambda+1}\Gamma_{\lambda-1}) L'(\alpha)^{\lambda-1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(\Gamma + \alpha^{-\lambda+1}\Gamma_1 + \cdots + \alpha^{(-\lambda+1)(-\lambda+1)}\Gamma_{\lambda-1}) L'(\alpha^{\lambda-1})^{\lambda-1}
\end{aligned}$$

haben zyklische Koeffizienten in $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}$ und sind demzufolge eine rationale Zahl C beziehungsweise Zahlen $\chi(\alpha), \chi(\alpha^2), \ldots$ in α. Daher ist

$$\Gamma = \frac{1}{\lambda}\left(C + \frac{\chi(\alpha)}{(g(\alpha)\psi(\alpha))^{\lambda-1}} + \frac{\chi(\alpha^2)}{(g(\alpha^2)\psi(\alpha^2))^{\lambda-1}} + \cdots\right).$$

Bezeichnet $\Theta^{(i)}$ die i-fache Wiederholung der Funktion Θ, so ist

$$\xi_i + \omega^{-\lambda}\xi_{i+\lambda} + \cdots + \omega^{-\lambda(\mu-1)}\xi_{i+(\mu-1)\lambda} = \Theta^{(i)}(\xi_0) + \omega^{-\lambda}\Theta^{(i)}(\xi_\lambda) + \cdots$$

und es erhellt, daß $L'(\omega) A(\omega^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}n-1}$ zyklische Koeffizienten in $\xi_0, \xi_\lambda, \ldots$ hat und demzufolge eine ganze rationalzahlige Funktion von ω ist. Da dasselbe von $A(\omega^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}n}$ gilt, so ist $\frac{L'(\omega)}{A(\omega^\lambda)}$ und daher auch $\frac{L(\omega)}{A(\omega^\lambda)}$ für alle von 1 verschiedenen Werte von ω eine ganze rationalzahlige Funktion $\vartheta(\omega)$ von ω, und man hat

$$L(\omega) = \vartheta(\omega) A(\omega^\lambda).$$

4.

Ist $n = 2^\varrho$ und $\varrho > 1$, so gibt es eine zyklische Gleichung n-ten Grades mit von 0 verschiedenen Resolventen, welche der Bedingung

$$L(-1) = \sqrt{2}$$

genügt.

Es sei ω eine beliebige n-te Einheitswurzel, d ein von 1 verschiedener Teiler von n,

$$r = e^{\frac{1}{2d}\pi i}$$

und

$$F_d(\omega) = \Sigma \omega^{-\operatorname{ind} s} r^s, \qquad (s = 1, 3, \ldots 4n-1)$$

wo $\operatorname{ind} s$ die der Kongruenz

$$5^{\operatorname{ind} s} \equiv (-1)^{\frac{s-1}{2}} s \pmod{4n}$$

genügende Zahl der Reihe $0, 1, \ldots n-1$ bezeichnet. Da für eine beliebige ungerade Zahl t

$$F_d(\omega) = \Sigma \omega^{-\operatorname{ind} ts} r^{ts}$$

ist, so wird

$$F_d(\omega)\omega^{\operatorname{ind} t} r^t = \Sigma \omega^{-\operatorname{ind} s} r^{t(1+s)}.$$

Summiert man über die Werte $1, 3, \ldots 4n-1$ von t und erwägt, daß die Summe

$$r^{1+s} + r^{3(1+s)} + \cdots + r^{(4n-1)(1+s)}$$

nur für die Werte

$$2d-1,\ 4d-1, \ldots 4n-1$$

von s von 0 verschieden ist, so ergibt sich

$$F_d(\omega)F_d(\omega^{-1}) = 2n\Sigma(-1)^h \omega^{-\operatorname{ind}(2hd-1)}. \qquad \left(h = 1, 2, \ldots \frac{2n}{d}\right)$$

Aus den Kongruenzen

$$5^{\operatorname{ind}(2hd-1)} \equiv 1 - 2hd \pmod{4n}$$

$$\equiv (1-2d)^h \equiv 5^{\frac{1}{2}dh} \pmod{4d}$$

folgt

$$\operatorname{ind}(2hd-1) \equiv \frac{1}{2}dh \pmod{d}.$$

Man kann demnach

$$\operatorname{ind}(2hd-1) = k\frac{d}{2}$$

setzen und es erhellt, daß k die Werte $0, 1, \ldots \frac{2n}{d} - 1$ durchläuft. Somit wird

$$F_d(\omega)F_d(\omega^{-1}) = 2n\Sigma(-1)^k \omega^{-\frac{1}{2}kd}. \qquad \left(k = 0, 1, \ldots \frac{2n}{d} - 1\right)$$

Da $F_d(\omega^{-1})$ der konjugierte Wert von $F_d(\omega)$ ist, so ist demnach $F_d(\omega)$ nur dann von 0 verschieden, wenn ω eine primitive d-te Einheitswurzel ist. In diesem Falle ist

$$F_d(\omega)F_d(\omega^{-1})=\frac{4n^2}{d}.$$

Setzt man

$$x_{\text{ind } s}=\frac{1}{n}\Sigma\left(e^{\frac{1}{2d}s\pi i}+e^{-\frac{1}{2d}s\pi i}\right), \qquad (d=2,4,\dots n)$$

so sind $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$ Wurzeln einer zyklischen Gleichung. Denn es gibt eine ganze rationalzahlige Funktion g, welche der Bedingung

$$x_h=g\left(\cos\frac{5^h\pi}{2n}\right) \qquad (h=0,1,\dots n-1)$$

genügt, und

$$\cos\frac{\pi}{2n},\ \cos\frac{5\pi}{2n},\ \dots\ \cos\frac{5^{n-1}\pi}{2n}$$

sind die Wurzeln der zyklischen Gleichung

$$G(x)=0,$$

wo G die zur Darstellung von $\cos nu$ durch $\cos u$ dienende ganze Funktion n-ten Grades bezeichnet.

Die Resolventen

$$L(\omega)=\Sigma\omega^{-}\ x_h$$

sind alle von 0 verschieden, da

$$L(\omega)=\frac{1}{n}F_d(\omega)$$

ist, wenn ω eine primitive d-te Einheitswurzel ist. Insbesondere ist

$$L(-1)=\frac{1}{n}F_2(-1)=\frac{1}{n}\Sigma(-1)^{\text{ind } s}e^{\frac{1}{4}s\pi i}=\sqrt{2}.$$

5.

Ist λ eine ungerade Primzahl, $n=\lambda^\varrho$ und α eine primitive λ-te Einheitswurzel, so gibt es eine zyklische Gleichung n-ten Grades mit von 0 verschiedenen Resolventen, welche der Bedingung

$$L(\alpha)^\lambda=\alpha$$

genügt.

Es seien g eine primitive Kongruenzwurzel von λ, r eine $n\lambda$-te Einheitswurzel, welche den Bedingungen

$$g^{\lambda-1} \equiv 1-\lambda \pmod{\lambda^2},$$
$$r^n = \alpha$$

genügen, ω eine beliebige n-te Einheitswurzel, d ein von 1 verschiedener Teiler von n und man setze

$$F_d(\omega) = \Sigma \omega^{-\operatorname{ind} s} r^{\frac{1}{d} ns},$$

wo s alle zu λ teilerfremden Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots n\lambda - 1$ zu durchlaufen hat und $\operatorname{ind} s$ auf die primitive Kongruenzwurzel g und den Modul $n\lambda$ zu beziehen ist. Da für eine beliebige zu λ teilerfremde Zahl t der Reihe $0, 1, \ldots n\lambda - 1$

$$F_d(\omega) = \Sigma \omega^{-\operatorname{ind} ts} r^{\frac{1}{d} nts}$$

ist, so wird

$$F_d(\omega)\omega^{\operatorname{ind} t} r^{\frac{1}{d} nt} = \Sigma \omega^{-\operatorname{ind} s} r^{\frac{1}{d} nt(1+s)}$$

und die Summation über alle Werte von t ergibt

$$F_d(\omega) F_d(\omega^{-1}) = \Sigma \omega^{-\operatorname{ind} s} S,$$

wo

$$S = \left(r^{\frac{1}{d} n(1+s)} + \cdots + r^{\frac{1}{d}(\lambda-1)n(1+s)} \right) \Sigma r^{\frac{1}{d} k\lambda(1+s)n} \qquad (k=0, 1, \ldots n-1)$$

ist. Die Summe S verschwindet nur dann nicht, wenn $s+1$ ein Vielfaches von d ist. Da in diesem Falle

$$s \equiv -1 \equiv g^{\frac{1}{2}\varphi(d)} \pmod{d},$$
$$\operatorname{ind} s \equiv \frac{1}{2}\varphi(d) \pmod{\varphi(d)}$$

ist, so kann

$$\operatorname{ind} s = \frac{1}{2}\varphi(d)(2h+1)$$

gesetzt werden und es ergibt sich

$$s \equiv g^{\frac{1}{2}\varphi(d)(2h+1)} \pmod{n\lambda}$$
$$\equiv (-1-\frac{1}{2}d(\lambda-1))^{2h+1} \pmod{\lambda d}$$
$$\equiv -1-\frac{1}{2}\varphi(\lambda d)(2h+1).$$

Hieraus folgt

$$r^{\frac{1}{d}n(1+s)} = \alpha^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)(2h+1)},$$

$$S = n\Sigma\alpha^{\frac{1}{2}(\lambda-1)m(2h+1)}. \qquad (m=1,2,\dots\lambda-1)$$

Somit ist

$$F(\omega)\,F(\omega^{-1}) = n\Sigma\left(\alpha^m\omega^{-\frac{1}{\lambda}d}\right)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)(2h+1)}.$$
$$(h=0,1,\dots\frac{n\lambda}{d}-1,\ m=1,2,\dots\lambda-1)$$

Ist nun ω keine primitive d-te Einheitswurzel, so kann für keinen Wert von m

$$\alpha^m\omega^{-\frac{1}{\lambda}d} = 1$$

sein und es ergibt sich

$$F_d(\omega)\,F_d(\omega^{-1}) = 0$$

und daher auch

$$F_d(\omega) = 0,$$

weil $F_d(\omega^{-1})$ zu $F_d(\omega)$ konjugiert ist. Ist dagegen ω eine primitive d-te Einheitswurzel, so ist für einen Wert von m

$$\omega^{\frac{1}{\lambda}d} = \alpha^m$$

und es wird

$$F_d(\omega)\,F_d(\omega^{-1}) = \frac{n^2\lambda}{d}.$$

Setzt man

$$x_i = \frac{1}{n}\Sigma r^{\frac{1}{d}ng^i+hn}, \qquad (d=\lambda,\lambda^2,\dots n,\ h=0,1,\dots\lambda-2)$$

so sind $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$ die Wurzeln einer zyklischen Gleichung n-ten Grades. Denn jede zyklische Funktion dieser Größen ist eine ganze rationalzahlige Funktion von r, welche bei der Ersetzung von r durch r^g ungeändert bleibt. Die Resolventen dieser Gleichung sind alle von 0 verschieden, da

$$L(\omega) = \frac{1}{n}F_d(\omega)$$

ist, wenn ω eine primitive d-te Einheitswurzel ist.

Insbesondere ist

$$L(\alpha) = \frac{1}{n}F_\lambda(\alpha) = \frac{1}{n}\Sigma\alpha^{-\operatorname{ind} s}r^{\frac{1}{\lambda}ns}.$$

Da der Rest des Produkts $g^h u^\lambda$ in bezug auf den Modul λn alle Zahlen s ergibt, wenn h die Zahlen $0, 1, \ldots \lambda-1$, u die zu λ teilerfremden Zahlen der Reihe $0, 1, 2 \ldots n-1$ durchlaufen, und

$$\text{ind } g^h u^\lambda \equiv h \pmod{\lambda},$$
$$u^\lambda \equiv v^\lambda \pmod{\lambda^2}$$

ist, wo v den Rest von u in bezug auf λ bezeichnet, so wird

$$L(\alpha) = \frac{1}{\lambda} \Sigma \alpha^{-h} r^{\frac{1}{\lambda} n g^h v^\lambda}. \qquad (h=0,1,\ldots\lambda-1,\ v=1,2,\ldots\lambda-1)$$

Da ferner

$$g^{h(\lambda-1)} \equiv (1-\lambda)^h \equiv 1-h\lambda \pmod{\lambda^2}$$

ist, so ergibt die Multiplikation mit $g^h v^\lambda (1+h\lambda)$

$$g^h v^\lambda \equiv (g^h v)^\lambda (1+h\lambda) \equiv \mu^\lambda + h\lambda\mu \pmod{\lambda^2},$$

wo μ den Rest von $g^h v$ in bezug auf λ bezeichnet. Bei festem h durchläuft μ zugleich mit v die Werte $1, 2, \ldots \lambda-1$, und es wird demzufolge

$$L(\alpha) = \frac{1}{\lambda} \Sigma \alpha^{h(\mu-1)} r^{\frac{1}{\lambda} n\mu^\lambda}. \qquad (h=0,1,\ldots\lambda-1,\ \mu=1,2,\ldots\lambda-1)$$

Die Ausführung der Summation nach h ergibt

$$L(\alpha) = r^{\frac{1}{\lambda} n}.$$

Somit ist

$$L(\alpha)^\lambda = r^n = \alpha.$$

6.

Bei dem Beweise des *Kronecker*schen Satzes kann man sich auf zyklische Gleichungen beschränken, deren Grad n eine Primzahlpotenz ist, und man hat zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem n eine Potenz von 2 oder einer ungeraden Primzahl ist. Die Gleichungen können unbeschadet der Allgemeinheit ganzzahlig, mit dem Koeffizienten 1 bei x^n und ihre Resolventen von 0 verschieden vorausgesetzt werden.

1. Es sei $n = 2^\varrho$, $\varrho > 1$ und

$$f(x) = 0$$

eine zyklische Gleichung vom Grade n mit den Wurzeln $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$.

$L(-1)^2$ ist eine ganze positive Zahl. Denn es sei

$$L(-1)L(i)^2=c, \qquad L(-1)L(-i)^2=c', \qquad L(i)L(-i)=d.$$

c, c' sind konjugierte komplexe ganze Zahlen, d eine reelle ganze Zahl und man hat

$$L(-1)^2=\frac{N(c)}{d^2}.$$

Ist die Zahl $L(-1)^2$ durch eine ungerade Primzahl p teilbar, welche nach dem Modul n nicht zum Exponenten 1 gehört, so ist sie genau durch eine Potenz von p^2 teilbar.

In dem Falle $n=4$ erhellt die Behauptung unmittelbar aus der vorstehenden Gleichung.

Ist dagegen $n>4$, so fallen sowohl die Reste des Ausdrucks

$$5^\mu(1+6u)\ (1+\tfrac{1}{2}nv)$$

als auch die des Ausdrucks

$$5^\mu(1+2u)\ (1+\tfrac{1}{2}nv)$$

in bezug auf den Modul n mit den Zahlen

$$1, 3, 5, \ldots\ n-1$$

zusammen, wenn μ, u, v die Zahlen

$$\mu=0,\ 1, \ldots\ \frac{1}{8}n-1,$$
$$u=0, 1; \qquad v=0, 1$$

durchlaufen. Bezeichnet daher ω eine primitive n-te Einheitswurzel und setzt man

$$5^\mu(1+6u)=a, \qquad 5^\mu(1+2u)=b,$$

so umfassen sowohl die Potenzen $\omega^a, (-\omega)^a$ als auch die Potenzen $\omega^b, (-\omega)^b$ sämtliche primitiven n-ten Einheitswurzeln. Der Quotient

$$\frac{L(-1)\Pi L(\omega^b)}{\Pi L(\omega^a)},$$

in welchem die Produktzeichen auf die Zahlen a, b zu beziehen sind, bleibt bei einer zyklischen Vertauschung der Wurzeln $x_0, x_1, \ldots\ x_{n-1}$ ungeändert

und ist demnach eine durch ω rational darstellbare Zahl. Gibt man dieser Zahl die Gestalt $\frac{M}{N}g(\omega)$ und setzt

$$g(\omega)\,g(-\omega) = N^2 m,$$

wo g eine ganze Funktion und sowohl M, N als auch die Koeffizienten von g teilerfremde ganze Zahlen sind, so wird

$$\frac{L(-1)\,\Pi L(-\omega^b)}{\Pi L(-\omega^a)} = \frac{M}{N}g(-\omega)$$

$$L(-1)^2 = m\,M^2.$$

Es erhellt, daß m rational und demzufolge auch eine ganze Zahl ist, weil $m\,M^2$, $m\,N^2$ algebraisch ganz sind.

Da die in bezug auf den Modul p irreduktiblen Faktoren von $x^{\frac{1}{2}^n}+1$ Funktionen von x^2 sind, so gilt dasselbe von dem größten gemeinschaftlichen Teiler T von $g(x)$ und $x^{\frac{1}{2}^n}+1$ in bezug auf p und die Identitäten

$$T \equiv A(x)\,g(x) + B(x)\left(x^{\frac{1}{2}^n}+1\right),$$
$$g(x) \equiv C(x)\,T \pmod p,$$

in welchen A, B, C ganze ganzzahlige Funktionen bezeichnen, ergeben

$$g(\omega) \equiv C(\omega)\,T(\omega) \equiv C(\omega)\,T(-\omega) \equiv C(\omega)\,A(-\omega)\,g(-\omega) \pmod p.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit $g(\omega)$

$$g(\omega)^2 \equiv C(\omega)\,A(-\omega)\,m\,N^2 \pmod p.$$

Stellt man das Produkt von $g(x)$ in die Diskriminante D der Funktion $x^{\frac{1}{2}^n}+1$ mittels der *Lagrange*schen Interpolationsformel dar, so erscheint dasselbe in der Gestalt

$$g(\omega)\,I' + g(\omega^3)\,I'' + \cdots,$$

seine $\left(\frac{1}{2}n+1\right)$-te Potenz daher in der Gestalt

$$g^2(\omega)\,I_1 + g^2(\omega^3)\,I_1' + \cdots$$

und man hat

$$(Dg)^{\frac{1}{2}^{n+1}} \equiv m\,N^2\,H \pmod p,$$

wo $I', I'', \ldots; I_1, I_1', \ldots; H$ ganz und ganzzahlig in ω, x sind. Somit ist

$$(Dg)^{\frac{1}{2}n+1} = mN^2U + pV,$$

wo U, V ganze ganzzahlige Funktionen von x bezeichnen.

Da D zu p teilerfremd und g primitiv ist, so zeigt die vorstehende Identität, daß m zu p teilerfremd ist. Dann fällt aber die höchste in $L(-1)^2$ aufgehende Potenz von p mit der in M^2 aufgehenden zusammen.

Ist demnach Q^2 das größte in $L(-1)^2$ aufgehende Quadrat und

$$L(-1)^2 = PQ^2,$$

so können die Primfaktoren von P nur $= 2$ oder von der Form $hn+1$ sein.

Ist $P > 1$, so gibt es zyklische Gleichungen n-ten Grades

$$f_1 = 0, \ldots,$$

deren Resolventen $L_1(\omega), \ldots$ der Bedingung genügen, daß $L_1(-1)^2, \ldots$ mit den einzelnen Primfaktoren von P zusammenfallen. Ist nämlich p ein ungerader Primfaktor von P, r eine primitive p-te Einheitswurzel, g eine primitive Kongruenzwurzel von p, so sind die Perioden

$$\eta_i = r^{g^i} + r^{g^{i+n}} + \cdots + r^{g^{i+p-n}} \qquad (i=0,1,\ldots n-1)$$

Wurzeln einer zyklischen Gleichung n-ten Grades. Die Resolventen $L_1(\omega), \ldots$ dieser Gleichung sind alle von 0 verschieden und es ist

$$L_1(-1) = \Sigma\left(\frac{s}{p}\right) r^s = \sqrt{p}\,. \qquad (s=1,2,\ldots p-1)$$

Besitzt P den Primfaktor 2, so ergibt sich die betreffende Gleichung aus 4.

Die gegebene Gleichung ist aus den genannten Gleichungen und einer zyklischen Gleichung n-ten Grades

$$f_0(x) = 0$$

zusammensetzbar, deren Resolventen $L_0(\omega), \ldots$ seien. Da

$$L_0(-1)^2 = \frac{L(-1)^2}{L_1(-1)^2 \ldots} = \frac{L(-1)^2}{P} = Q^2$$

ist, so kann für jede von 1 verschiedene n-te Einheitswurzel ω

$$L_0(\omega) = \vartheta(\omega) A(\omega^2)$$

gesetzt werden, wo $\vartheta(\omega)$ eine Zahl in ω und $\Lambda(\omega^2)$ die Resolvente einer zyklischen Gleichung

$$\psi(x)=0$$

vom Grade $\frac{1}{2}n$ bezeichnen.

Somit ist

$$L(\omega)=\vartheta(\omega)\,\Lambda(\omega^2)\,L_1(\omega)\ldots$$

und es erhellt, daß die Wurzeln $x_0, x_1, \ldots$ der ursprünglichen Gleichung rationale Verbindungen der Wurzeln der Gleichungen

$$\psi=0, \qquad f_1=0, \ldots$$

sind.

Ist $P=1$, so fallen die Gleichungen

$$f_1=0, \ldots$$

fort.

Gilt der Satz *Kronecker*s für den Grad $\frac{1}{2}n$, so sind die Wurzeln der Gleichung

$$\psi=0$$

und daher auch $x_0, x_1, \ldots$ rationale Verbindungen von Einheitswurzeln.

Hiermit ist der Beweis auf den Fall einer quadratischen Gleichung zurückgeführt, deren Wurzeln durch $e^{\frac{i\pi}{2}}$, $e^{\frac{i\pi}{4}}$ und die $\frac{q-1}{2}$-gliedrigen Perioden q-ter Einheitswurzeln darstellbar sind, wo q eine ungerade Primzahl bezeichnet.

II. Es sei λ eine ungerade Primzahl, $n=\lambda^\varrho$ und

$$f=0$$

eine zyklische Gleichung n-ten Grades mit den Wurzeln $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$.

Bezeichnet α eine imaginäre λ-te Einheitswurzel, so hat $L(\alpha)^\lambda$ zyklische Koeffizienten und ist demzufolge eine ganze Zahl $F(\alpha)$ in α.

Ist $\varrho>1$ und die Zahl $F(\alpha)$ — in dem Körper der Zahlen in α — durch einen Primfaktor $\mathfrak{p}$ einer Primzahl p teilbar, welche nach dem Modul n zu einem der Exponenten $\lambda, \lambda^2, \ldots \frac{n}{\lambda}$ gehört, so ist dieselbe genau durch eine Potenz von $\mathfrak{p}^\lambda$ teilbar.

Um dies darzutun, sei γ eine primitive Kongruenzwurzel von λ, welche der Bedingung

$$\gamma^{\lambda-1}-1\equiv-\lambda(\gamma-1) \pmod{\lambda^2}$$

genügt, und ω eine Wurzel der Gleichung

$$\omega^{\frac{1}{\lambda}n} = \alpha.$$

Sowohl die Reste des Ausdrucks

$$\gamma^{\mu}(1+\lambda u)\left(1+\frac{n}{\lambda}v\right)$$

als auch die des Ausdrucks

$$\gamma^{\lambda\mu}(1+\lambda u)\left(1+\frac{n}{\lambda}v\right)$$

in bezug auf den Modul n fallen mit den zu λ teilerfremden Zahlen der Reihe $0, 1 \ldots n-1$ zusammen, wenn μ, u, v die Zahlen

$$\mu = 0, 1, \ldots \lambda - 2,$$
$$u = 0, 1, \ldots \frac{1}{\lambda^2}n - 1,$$
$$v = 0, 1, \ldots \lambda - 1$$

durchlaufen. Wird demnach

$$\gamma^{\lambda\mu}(1+\lambda u) = a, \qquad \gamma^{\mu}(1+\lambda u) = b$$

gesetzt, so umfassen sowohl die Potenzen

$$\omega^a, (\alpha\omega)^a, \ldots (\alpha^{\lambda-1}\omega)^a$$

als auch die Potenzen

$$\omega^b, (\alpha\omega)^b, \ldots (\alpha^{\lambda-1}\omega)^b$$

alle primitiven n-ten Einheitswurzeln. Der Quotient

$$\frac{L(\alpha)\Pi L(\omega^b)}{\Pi L(\omega^a)},$$

in welchem die Produktzeichen auf die Zahlen a, b zu beziehen sind, bleibt bei einer zyklischen Vertauschung der Wurzeln $x_0, x_1, \ldots$ ungeändert und ist demzufolge eine durch ω rational darstellbare Zahl. Gibt man dieser Zahl die Gestalt $\frac{1}{N}Mg(\omega)$, wo M, N teilerfremde ganze Zahlen und g eine ganze ganzzahlige primitive Funktion bezeichnen, und setzt

$$g(\omega)\, g(\alpha\omega) \ldots g(\alpha^{\lambda-1}\omega) = m,$$

so wird

$$\frac{L(\alpha)\Pi L(\alpha^{hb}\omega^b)}{\Pi L(\alpha^{ha}\omega^a)} = \frac{Mg(\alpha^h\omega)}{N}$$

und daher

$$N^\lambda L(\alpha)^\lambda = N^\lambda F(\alpha) = m M^\lambda.$$

Da die in bezug auf den Modul p irreduktiblen Faktoren der Funktion

$$X = \frac{x^n - 1}{x^{\frac{1}{\lambda}n} - 1}$$

Funktionen von x^λ sind, so gilt dasselbe von dem größten gemeinschaftlichen Teiler T der Funktionen $g(x)$ und X in bezug auf den Modul p und die Identitäten

$$T \equiv Ag + BX, \quad g \equiv CT \pmod p$$

ergeben

$$g(\omega) \equiv C(\omega)\, T(\omega) \equiv C(\omega)\, T(\alpha^h \omega) \equiv C(\omega)\, A(\alpha^h \omega)\, g(\alpha^h \omega) \pmod p,$$

wo A, B, C ganze ganzzahlige Funktionen bezeichnen. Hieraus folgt

$$g(\omega)^\lambda \equiv m C(\omega)^{\lambda-1} A(\alpha\omega) \dots A(\alpha^{\lambda-1}\omega) \pmod p.$$

Es sei D die Diskriminante von X, $g_0(y, \alpha)$ der Rest der Funktion $g(y)$ in bezug auf den Teiler $y^{\frac{1}{\lambda}n} - \alpha$, $E(y)$ der primitive ganzzahlige Faktor des Produkts $g_0(y, \alpha)\, g_0(y, \alpha^2) \dots g_0(y, \alpha^{\lambda-1})$ und

$$\frac{m E(x)^\lambda}{g_0(x, \alpha)^\lambda} = \chi.$$

Da die *Lagrange*sche Interpolationsformel für das Produkt $D g_0(y, \alpha)$ einen Ausdruck von der Form

$$\Sigma g(\omega)\, I'$$

ergibt, so erscheint $D^n g_0(y, \alpha)^n$ in der Gestalt

$$\Sigma g^\lambda(\omega)\, \mathfrak{P}\, I'_1$$

und man hat

$$D^n g_0(y, \alpha)^n = m \Sigma I'' \mathfrak{P} + p \Sigma I''' \mathfrak{P},$$

wo die Summenzeichen auf die Wurzeln der Gleichung

$$y^{\frac{1}{\lambda}n} - \alpha = 0$$

zu beziehen, $I', \dots I'''$ ganze ganzzahlige Funktionen dieser Wurzeln und der Variablen y sind und $\mathfrak{P}$ ein Produkt von $n - \lambda$ Faktoren von der Form

$g(\omega)$ bezeichnet. Multipliziert man mit

$$\frac{E^n(x)}{g_0(x,\alpha)^n}\Pi\frac{E(x)^n\,g_0(y,\alpha^k)^n}{g_0(x,\alpha^k)^n} \qquad (k=2,3,\dots\lambda-1)$$

und erwägt, daß $\frac{E(x)\,g_0(y,\alpha)}{g_0(x,\alpha)}$, $\frac{E(x)^{n-\lambda}\,\mathfrak{P}}{g_0(x,\alpha)^{n-\lambda}}$ ganz und ganzzahlig in x, y und n-ten Einheitswurzeln sind, so ergibt sich

$$D^n E(x)^{n(\lambda-2)} E(y)^n \equiv \chi H \pmod p,$$

wo H ganz und ganzzahlig in x, y und n-ten Einheitswurzeln ist und daher auch ganz und ganzzahlig in x, y, α angenommen werden darf.

Hiernach sind nicht alle Koeffizienten von χ durch $\mathfrak{p}$ teilbar, und die Gleichung

$$E(x)^\lambda N^\lambda F(\alpha) = \chi M^\lambda g_0(x,\ \alpha)^\lambda$$

zeigt, daß der Exponent der höchsten in $F(\alpha)$ aufgehenden Potenz von $\mathfrak{p}$ ein Vielfaches von λ ist.

Da der Quotient

$$\frac{L(\alpha)}{\Pi L(\alpha^{-s})^{s'}}, \qquad (s=1,2,\dots\lambda-1)$$

in welchem s' die der Zahlenreihe $1, 2, \dots \lambda-1$ angehörende Wurzel der Kongruenz

$$ss' \equiv 1 \pmod\lambda$$

bezeichnet, bei einer zyklischen Vertauschung der Wurzeln x_0, x_1, ... ungeändert bleibt, so ist derselbe eine Zahl $G(\alpha)$ in α und man hat

$$L(\alpha) = G(\alpha)\,\Pi L(\alpha^{-s})^{s'},$$
$$F(\alpha) = G(\alpha)^\lambda\,\Pi F(\alpha^{-s})^{s'}.$$

Man denke sich $F(\alpha^{-1})$ in Primfaktoren in α zerlegt und es sei

$$F(\alpha^{-1}) = \Pi\mathfrak{p}(\alpha)$$

diese Zerlegung. Es ist dann, wenn zur Abkürzung

$$\Pi\mathfrak{p}(\alpha^s)^{s'} = [\mathfrak{p}] \qquad (s=1,2,\dots\lambda-1)$$

gesetzt wird,

$$\Pi F(\alpha^{-s})^{s'} = \Pi[\mathfrak{p}].$$

Kommen in der Zerlegung $\Pi\mathfrak{p}$ Primfaktoren $\mathfrak{p}$ von Primzahlen p von der Form $hn+1$ vor, so kann das Produkt $[\mathfrak{p}]$ durch die λ-te Potenz der Resolvente $L_1(\alpha)$ derjenigen zyklischen Gleichung n-ten Grades

$$f_1 = 0$$

ersetzt werden, welche zu Wurzeln die h-gliedrigen Perioden von p-ten Einheitswurzeln und von 0 verschiedene Resolventen hat. Ist nämlich r eine imaginäre p-te Einheitswurzel, g_1 eine der Bedingung

$$\alpha \equiv g_1^{\frac{1}{\lambda}(p-1)} \pmod{\mathfrak{p}}$$

genügende primitive Kongruenzwurzel von p und setzt man

$$\eta_i = r^{g^i} + r^{g^{i+n}} + \dots,$$

so sind $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_{n-1}$ Wurzeln einer zyklischen Gleichung n-ten Grades, für welche

$$L_1(\alpha) = \Sigma\, \alpha^{-\operatorname{ind} k}\, r^k \qquad (k = 1, 2, \dots p-1)$$

und auf Grund der *Kummer*schen Zerfällung*)

$$L_1(\alpha)^\lambda = [\mathfrak{p}]$$

ist. Es sei P das Produkt der Resolventen $L_1(\omega), \dots$ dieser Art.

Kommen (in dem Falle $\varrho > 1$) in $\Pi\mathfrak{p}$ Primfaktoren $\mathfrak{p}$ von Primzahlen p von der Form $1 + h\lambda^\pi$ vor, wo $\pi < \varrho$ und h zu λ teilerfremd ist, so kommt jeder derselben mit einem Exponenten vor, welcher ein Vielfaches von λ ist. Da das Produkt $[\mathfrak{p}]$ durch die λ-te Potenz der aus der Wurzel α hervorgehenden Resolvente der zyklischen Gleichung ersetzt werden kann, welche die h-gliedrigen Perioden der p-ten Einheitswurzeln zu Wurzeln hat, so kann statt aller Produkte $[\mathfrak{p}]$, welche sich auf die Primzahlen der in Rede stehenden Art beziehen, die λ-te Potenz einer Zahl in α gesetzt werden.

Kommen in $\Pi\mathfrak{p}$ Primfaktoren von Primzahlen q vor, welche nach dem Modul λ zu einem höheren Exponenten als 1 gehören, so kann $[\mathfrak{p}]$ nach *Kummer***) durch die λ-te Potenz einer Zahl in α ersetzt werden.

---

*) *Kummer*, Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten komplexen Zahlen in ihre Primfaktoren. Dieses Journal Bd. 35.

**) *Kummer*, ebenda § 12.

Kommt in $\Pi\mathfrak{p}$ der Primfaktor $1-\alpha$ von λ vor, so fällt das Produkt $[1-\alpha]$ bis auf eine Einheit mit $(1-\alpha)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)\lambda}$ zusammen und kann durch eine λ-te Potenz ersetzt werden.

Hiernach gibt es eine Zahl $G_1(\alpha)$ in α von der Art, daß das Produkt $\Pi F(\alpha^{-s})^{s'}$ bis auf eine Einheit mit $G_1(\alpha)^\lambda P(\alpha)^\lambda$ zusammenfällt. Da jede Einheit in α die Gestalt $\alpha^\sigma \varepsilon(\alpha)$ hat, wo

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\alpha^{-1})$$

ist, so kann

$$\Pi F(\alpha^{-s})^{s'} = \alpha^\sigma \varepsilon(\alpha) G_1^\lambda(\alpha) P(\alpha)^\lambda$$

gesetzt werden. Multipliziert man diese Gleichung mit der aus derselben durch Verwandlung von α in α^{-1} hervorgehenden und erwägt, daß

$$F(\alpha^{-s}) F(\alpha^s),\ P(\alpha)^\lambda P(\alpha^{-1})^\lambda$$

λ-te Potenzen sind, so erhellt, daß ε^2 und daher auch ε selbst auf Grund der Gleichung

$$\varepsilon = \varepsilon^{-\lambda} \cdot (\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}(\lambda+1)}$$

eine λ-te Potenz ist.

Da es eine zyklische Gleichung n-ten Grades gibt, für welche die λ-te Potenz der aus der Wurzel α hervorgehenden Resolvente $L'(\alpha)$ mit α zusammenfällt, so ist

$$\alpha^\sigma = L'(\alpha)^{\sigma\lambda}.$$

Setzt man daher

$$PL'(\omega)^\sigma = P_1,$$

so ergibt sich

$$F(\alpha) = L(\alpha)^\lambda = H(\alpha)^\lambda P(\alpha)_1^\lambda,$$

wo $H(\alpha)$ eine Zahl in α bezeichnet.

Hiernach geht die Gleichung

$$f = 0$$

aus der Zusammensetzung der zyklischen Gleichungen

$$f_1 = 0, \ldots,$$

welche die in P_1 vorkommenden Resolventen besitzen und deren Wurzeln

rationale Verbindungen von Einheitswurzeln sind, mit einer zyklischen Gleichung

$$f_0 = 0,$$

hervor, für welche die der Wurzel α entsprechende Resolvente $L_0(\alpha)$ der Gleichung

$$L_0^\lambda(\alpha) = H(\alpha)^\lambda$$

genügt.

Auf Grund dieser Gleichung hat nun in dem Falle $\varrho = 1$ die Gleichung

$$f_0 = 0$$

rationale Wurzeln und der *Kronecker*sche Satz ist bewiesen.

Ist aber $\varrho > 1$, so kann für jede von 1 verschiedene n-te Einheitswurzel ω

$$L_0(\omega) = \vartheta(\omega)\, A(\omega^\lambda),$$
$$L\ (\omega) = \vartheta(\omega)\, A(\omega^\lambda) P_1(\omega)$$

gesetzt werden, wo $\vartheta(\omega)$ eine Zahl in ω und $A(\omega^\lambda)$ die Resolvente einer zyklischen Gleichung vom Grade $\frac{1}{\lambda} n$ bezeichnet. Gilt demnach der *Kronecker*sche Satz für den Grad $\frac{1}{\lambda} n$, so gilt er auch für den Grad n. Hiermit ist der Beweis auf den Fall $n = \lambda$ zurückgeführt.

7.

Nach dem vorhergehenden besteht für die Resolvente einer zyklischen Gleichung von ungeradem Primzahlgrade λ die Gleichung

$$L(\alpha) = G(\alpha)\, \Pi L(\alpha^{-s})^{s'}$$
$$s = 1, 2, \ldots \lambda - 1, \quad ss' \equiv 1 \pmod{\lambda}$$

wo α eine imaginäre λ-te Einheitswurzel bezeichnet. Diese Gleichung ist wohl die einfachste Quelle für die *Kronecker*sche Gestalt der Wurzeln einer zyklischen Gleichung vom Grade λ und gilt für einen beliebigen Rationalitätsbereich. Denn $L(\alpha^{-1})^\lambda$ ist eine ganze Funktion $f(\alpha)$ von α mit Koeffizienten des geltenden Rationalitätsbereichs. Ebenso $G(\alpha)$. Daher ist für jede primitive λ-te Einheitswurzel α

$$L(\alpha) = G(\alpha)\, \Pi f(\alpha^s)^{\frac{1}{\lambda} s'} .$$

Auch für λ Größen, deren metazyklische Funktionen in einem gegebenen Rationalitätsbereich rational bestimmbar sind, ist die Gestalt aus der vorstehenden Form leicht abzuleiten.

Die entsprechende Formel für den Grad $n=\lambda^\varrho$, wo $\varrho>1$ ist, ergibt sich in folgender Weise.

Es sei $a=1+\lambda$ und, über alle zu λ teilerfremden Zahlen s unter n erstreckt,

$$\Sigma s'(as-[as])=S,$$

wo s' die in der Zahlenreihe $1, 2, \ldots n-1$ enthaltene Wurzel der Kongruenz

$$ss'\equiv 1 \pmod{n}$$

und $[as]$ den Rest von as in bezug auf den Modul n bezeichnen. Da

$$s'\equiv s^{\lambda(\varphi n-1)} \pmod{\lambda},$$

$$a^{\lambda\varphi n}\equiv 1 \pmod{n\lambda},$$

$$(as)^\lambda\equiv[as]^\lambda \pmod{n\lambda}$$

ist, so wird

$$(as-[as])s'\equiv(as-[as])s^{\lambda\varphi n-\lambda}\equiv as^{\lambda\varphi n-\lambda+1}-a^{\lambda\varphi n}s^{\lambda\varphi n-\lambda}[as]$$
$$\equiv as^{\lambda\varphi n-\lambda+1}-a^\lambda[as]^{\lambda\varphi n-\lambda+1} \pmod{n\lambda}.$$

Hieraus folgt, da $[as]$ dieselben Werte wie s durchläuft,

$$S\equiv(a-a^\lambda)\Sigma s^{\lambda\varphi n-\lambda+1} \pmod{n\lambda}.$$

Da ferner

$$s^{\lambda-1}\cdot s^{\lambda\varphi n-\lambda+1}\equiv 1 \pmod{n}$$

ist, so folgt

$$s^{\lambda\varphi n-\lambda+1}\equiv s'^{\lambda-1} \pmod{n}$$

und hieraus

$$\Sigma s^{\lambda\varphi n-\lambda+1}\equiv\Sigma s^{\lambda-1}\equiv-\frac{1}{\lambda}n \pmod{n},$$

$$S\equiv\frac{a^\lambda-a}{\lambda}n \pmod{n\lambda}.$$

Man kann demnach

$$S=nr$$

setzen, wo r zu λ teilerfremd ist.

Ist

$$rc \equiv 1 \pmod{n},$$

so bleiben die Quotienten

$$\frac{L(\omega^c)^a}{L(\omega^{ac})}, \qquad \frac{L(\omega)}{\Pi L(\omega^{cs})^{\frac{1}{n}(as'-[as'])}}$$

bei einer zyklischen Vertauschung der Wurzeln $x_0, x_1, \ldots$ ungeändert und sind infolgedessen ganze Funktionen $f(\omega)$, $F_1(\omega)$ mit Koeffizienten des Rationalitätsbereichs. Die Gleichung

$$\Pi L(\omega^{cs})^{\frac{1}{n}(as'-[as'])} = \Pi f(\omega^s)^{\frac{1}{n}s'}$$

ergibt dann für jede primitive n-te Einheitswurzel ω

$$L(\omega) = F_1(\omega)\, \Pi f(\omega^s)^{\frac{1}{n}s'}.$$

Ist d einer der Teiler $\lambda, \lambda^2, \ldots \lambda^{\varrho-1}$ von n, so bleibt der Quotient

$$\frac{L(\omega^d)}{\Pi f(\omega^s)^{\frac{1}{n}ds''}},$$

in welchem

$$ss'' \equiv 1 \pmod{\frac{n}{d}}, \qquad 0 < s'' < \frac{n}{d}$$

ist, bei der Ersetzung von ω durch das Produkt von ω in eine beliebige d-te Einheitswurzel ungeändert. Da derselbe andererseits die Gestalt

$$\frac{L(\omega^d)}{L(\omega)^d} F_1(\omega)^d\, \Pi f(\omega^s)^{\frac{1}{n}d(s'-s'')}$$

hat, so ist er rational in ω und demzufolge als ganze Funktion $F_d(\omega^d)$ von ω^d mit Koeffizienten des Rationalitätsbereichs darstellbar. Demnach ist

$$L(\omega^d) = F_d(\omega^d)\, \Pi f(\omega^s)^{\frac{1}{n}ds''}.$$

8.

Mit Hilfe der in dem vorhergehenden enthaltenen Ausführungen kann — allerdings nur in dem natürlichen Rationalitätsbereich — die Wurzelgestalt für eine zyklische Gleichung angegeben werden, deren Grad eine Potenz von 2 ist.

Es seien $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$ die Wurzeln einer zyklischen Gleichung vom Grade $n = 2^\varrho$ mit von 0 verschiedenen Resolventen $L(\omega)$ und $\varrho > 2$, $n = 4r$.

Nach 6. kann für jede von 1 verschiedene n-te Einheitswurzel ω

$$L(\omega) = \vartheta(\omega)\, \Lambda(\omega^2)\, L_1(\omega)\, L_2(\omega) \dots$$

gesetzt werden, wo $\vartheta(\omega)$ eine rationale Zahl in ω und $\Lambda(\omega^2)$ die Resolvente einer zyklischen Gleichung vom Grade $\frac{1}{2}n$ bezeichnen; $L_1(\omega), L_2(\omega), \dots$ sind Resolventen besonderer zyklischer Gleichungen

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0 \dots,$$

welche sich auf Primzahlen von der Form $hn+1$ und die Primzahl 2 beziehen. Für alle diese besonderen Gleichungen sind die Produkte

$$L_1(\omega)\, L_1(\omega^{-1}), \qquad L_2(\omega)\, L_2(\omega^{-1}), \dots$$

rationale Zahlen.

Es sei, über alle Zahlen s von der Form $4k+1$ der Reihe $1, 3, \dots n-1$ erstreckt,

$$S = \Sigma s' (5s - [5s]),$$

wo $[m]$ den Rest der Zahl m in bezug auf den Modul n bezeichnet und

$$ss' \equiv 1 \pmod{n}, \qquad 0 < s' < n$$

ist. S ist das n-fache einer ungeraden Zahl u.

Denn man kann

$$s = [5^\beta], \quad s' = [5^{\nu-\beta}]$$

setzen, wo β die Werte $0, 1, \dots \nu-1$ zu durchlaufen hat, und es wird

$$S \equiv \Sigma 5^{\nu-\beta}(5[5^\beta] - [5^{\beta+1}]) \equiv \Sigma 5^{\nu+1-\beta}[5^\beta] - \Sigma 5^{\nu-\beta}[5^{\beta+1}] \equiv 5(5^\nu - 1) \pmod{2n}.$$

Ist ω eine primitive n-te Einheitswurzel,

$$L_1(\omega)\, L_1(\omega^{-1}) = q,$$
$$uv \equiv 1 \pmod{n}$$

und setzt man

$$\frac{L_1(\omega^v)^5}{L_1(\omega^{5v})} = \psi_1(\omega),$$
$$\varphi_1(\omega) = \omega^{\nu\delta} q_1^2 + \omega^{-\nu\delta} \psi_1(\omega),$$

so kann der Exponent δ so gewählt werden, daß er einen der Werte 0, 1 hat und $\varphi_1(\omega)$ von 0 verschieden ist. Der Quotient

$$\frac{L_1(\omega)}{\Pi L_1(\omega^{vs'})^{\frac{1}{n}(5s-[5s])}}$$

bleibt bei einer zyklischen Vertauschung der Wurzeln der Gleichung

$$f_1 = 0$$

ungeändert und ist demzufolge eine Zahl in ω. Da überdies

$$\Pi L_1(\omega^{vs'})^{\frac{1}{n}(5s-[5s])} = \Pi \psi_1(\omega^s)^{\frac{1}{n}s'}$$

und

$$\psi_1(\omega^s)^{\frac{1}{n}s'} = q_1^{\frac{1}{n}2s'} \frac{\varphi_1(\omega^s)^{\frac{1}{n}s'} \varphi_1(\omega^{n-s})^{\frac{1}{n}(n-s')}}{\varphi_1(\omega^{-s})}$$

ist, so ist auch der Quotient

$$\frac{L_1(\omega)}{q_1^{\frac{1}{2}} \Pi \varphi_1(\omega^s)^{\frac{1}{n}s'}},$$

in welchem s alle ungeraden Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots n-1$ zu durchlaufen hat und

$$ss' \equiv 1 \pmod{n}$$

ist, eine Zahl in ω.

Hiernach kann

$$L_1(\omega) L_2(\omega) \cdots = q^{\frac{1}{2}} G(\omega) \Pi \varphi(\omega^s)^{\frac{1}{n}s'}$$

gesetzt werden, wo q eine rationale Zahl, $G(\omega)$, $\varphi(\omega)$ Zahlen in ω bezeichnen, und man hat für jede primitive n-te Einheitswurzel ω

$$L(\omega) = q^{\frac{1}{2}} \vartheta(\omega) G(\omega) \Delta(\omega^2) \Pi \varphi(\omega^s)^{\frac{1}{n}s'}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich die Darstellung

$$L(\omega) = m^{\frac{1}{2}} F_1(\omega) \Pi f(\omega^s)^{\frac{1}{n}s'},$$

$$s = 1, 3, \ldots n-1, \quad ss' \equiv 1 \pmod{n},$$

wo m eine rationale Zahl und $F_1(\omega)$, $f(\omega)$ Zahlen in ω bezeichnen. Denn diese Gleichung gilt tatsächlich für den Grad 4 und läßt sich für den Grad n dartun, wenn sie für $\frac{1}{2}n$ besteht.

Gilt nämlich die Darstellung für den Grad $\frac{n}{2}$, so hat man, weil ω^2 eine primitive $\frac{n}{2}$-te Einheitswurzel ist,

$$\Lambda(\omega^2) = m_0^{\frac{1}{2}} F_0(\omega^2)\, \Pi f_0(\omega^{2\sigma})^{\frac{2}{n}\sigma'},$$

$$\sigma = 1, 3, \ldots \tfrac{1}{2}n - 1, \quad \sigma\sigma' \equiv 1 \pmod{\tfrac{1}{2}n}.$$

Sind σ'', σ''' die Wurzeln der Kongruenzen

$$\sigma\sigma'' \equiv 1 \pmod{n}, \quad (\sigma + \tfrac{1}{2}n)\sigma''' \equiv 1 \pmod{n},$$

so sind die Zahlen $\sigma'' - \sigma', \sigma''' - \sigma'$ nicht negativ, durch $\frac{1}{2}n$ teilbar und die Kongruenz

$$\sigma'' - \sigma' + \sigma''' - \sigma' \equiv \tfrac{1}{2}n \pmod{n}$$

ergibt

$$\sigma'' - \sigma' + \sigma''' - \sigma' = \tfrac{1}{2}n.$$

Hieraus folgt

$$f_0(\omega^{2\sigma})^{\frac{1}{n}2\sigma'} = \frac{f_0(\omega^{2\sigma})^{\frac{1}{n}\sigma''} f_0(\omega^{2(\sigma+\frac{1}{2}n)})^{\frac{1}{n}\sigma'''}}{f_0(\omega^{2\sigma})^{\frac{1}{2}}}.$$

Wird demnach

$$f_0(\omega^2) f_0(\omega^6) \ldots f_0(\omega^{n-2}) = m$$

gesetzt, so ist

$$\Lambda(\omega^2) = \left(\frac{m_0}{m_1}\right)^{\frac{1}{2}} F_0(\omega^2)\, \Pi f_0(\omega^{2s})^{\frac{1}{n}s'},$$

$$s = 1, 3, \ldots n-1, \qquad ss' \equiv 1 \pmod{n}$$

und die Einsetzung dieses Ausdrucks in die obige Gleichung für $L(\omega)$ ergibt die behauptete Darstellung.

Ist d einer der Teiler $2, 4, \ldots 2^{\varrho-1}$ von n, so findet man wie früher

$$L(\omega^d) = F_d(\omega^d)\, \Pi f(\omega^s)^{\frac{1}{n}ds'},$$

$$s = 1, 3, \ldots n-1, \qquad ss' \equiv 1 \pmod{\tfrac{1}{d}n}.$$

Über Gitterpunkte in der Ebene.

Von Herrn *E. Busche* in Hamburg.

§ 1.

In einer Ebene mit rechtwinkligem Koordinatensystem, dessen Nullpunkt O ist, seien zwei Gitterpunkte A_1 und A_2 gegeben, d. h. solche Punkte, deren Koordinaten $a_{ik}(i, k=1, 2)$ beide ganze rationale Zahlen sind. Die Anordnung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

wo die Koordinaten desselben Punktes übereinanderstehen, werde als das System (a_{ik}) bezeichnet. Die Determinante $a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ des Systems wird vorläufig immer >0 vorausgesetzt, so daß A_2 links von der Strecke OA_1 liegt. Durch O, A_1, A_2 ist ein Parallelogramm $P_a = OA_1A_3A_2$ und eine Einteilung der Ebene in kongruente Parallelogramme vom Flächeninhalt a bestimmt, deren Eckpunkte das zu (a_{ik}) gehörige Punktgitter (ein Ausdruck von Herrn *F. Klein*) bilden. Rechnet man O und die auf OA_1, OA_2 außer A_1 und A_2 und O etwa noch liegenden Gitterpunkte mit zum Innern von P_a, so liegen a Gitterpunkte in P_a. Auf OA_k liegen außer A_k so viele Gitterpunkte, wie der größte gemeinsame Teiler (a_{1k}, a_{2k}) der Koordinaten von A_k angibt. Ein Punkt des Punktgitters von (a_{ik}) hat die Koordinaten $a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21} \mid a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21}$. Dabei bedeuten die ganzen Zahlen α_{11}, α_{21} die Koordinaten des Gitterpunktes in dem Koordinatensystem mit dem Nullpunkt O, für das A_1 und A_2 die Koordinaten $1|0$ und $0|1$ haben.

Der größte gemeinsame Teiler $\tau = (a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22})$ wird als der Koordinatenteiler des Systems (a_{ik}) bezeichnet; ist $\tau = 1$, so heißt das System primitiv.

Nach dem Vorgange von *Kronecker**) kann man drei Arten von Äquivalenz zweier Systeme unterscheiden, die ich verschieden benennen will. Ist nämlich $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ ein Einheitssystem, d. h. ist $\alpha\delta-\beta\gamma=+1$, und ist erstens

$$(b_{ik})=\left[\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right](a_{ik})=\left(\begin{smallmatrix}\alpha a_{11}+\beta a_{21} & \alpha a_{12}+\beta a_{22}\\ \gamma a_{11}+\delta a_{21} & \gamma a_{12}+\delta a_{22}\end{smallmatrix}\right),$$

so sollen (b_{ik}) und (a_{ik}) *affine* Systeme heißen. Geht zweitens (b_{ik}) aus (a_{ik}) durch hintere Komposition mit einem Einheitssystem hervor, ist also

$$(b_{ik})=(a_{ik})\left[\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right]=\left(\begin{smallmatrix}a_{11}\alpha+a_{12}\gamma & a_{11}\beta+a_{12}\delta\\ a_{21}\alpha+a_{22}\gamma & a_{21}\beta+a_{22}\delta\end{smallmatrix}\right),$$

so mögen (b_{ik}) und (a_{ik}) als *assoziierte* Systeme bezeichnet werden. Entsteht endlich drittens (b_{ik}) aus (a_{ik}) durch vordere und hintere Komposition mit einem Einheitssytem, so werden die Systeme *äquivalent* genannt. Affine und assoziierte Systeme sind also immer auch äquivalent. Es ist leicht zu sehen, daß die bekannten drei *Kronecker*schen Äquivalenzbedingungen in allen Fällen erfüllt sind.

Die Einheitssysteme habe ich bei der Komposition in eckige Klammern eingeschlossen, weil ich durch das Nebeneinanderstellen von runden Klammern später eine kommutative Multiplikation andeuten will.

§ 2.

Bei der hinteren Komposition mit einem Einheitssystem bleibt die Determinante und der Koordinatenteiler eines Systems (a_{ik}) und auch das durch (a_{ik}) bestimmte Punktgitter unverändert. Die Anzahl der nicht assoziierten Systeme einer gegebenen Determinante a ergibt sich nach *Kronecker* daraus, daß jedes System durch hintere Komposition auf eine reduzierte Form

$$\left(\begin{smallmatrix}d & 0\\ r & d'\end{smallmatrix}\right)$$

gebracht werden kann, wo $dd'=a$, $d>0$, $d'>r\overline{\geq}0$ ist, so daß jedes System der Determinante a mit einem einzigen reduzierten System assoziiert ist.

---

*) Vorlesungen über die Theorie der Determinanten (bearbeitet und fortgeführt von *K. Hensel*), Bd. 1 (Leipzig 1903). Man vergleiche für diesen und den folgenden Paragraphen der vorliegenden Arbeit insbesondere die fünfte Vorlesung. Meine geometrische Deutung eines Systems ist mit der *Kronecker*schen nicht identisch; a. a. O. ist ein System das Koeffizientensystem einer linearen Koordinatentransformation oder einer bilinearen Form.

Die Anzahl der reduzierten Systeme und damit die Anzahl der nicht assoziierten Systeme mit der Determinante a ist also gleich der Summe $\Phi(a)$ aller Teiler von a.

Bezeichnet man die Anzahl der nicht assoziierten primitiven Systeme der Determinante a mit $\psi(a)$, so ist die Anzahl der nicht assoziierten Systeme mit dem Koordinatenteiler τ, wo τ^2 in a aufgeht, gleich $\psi\left(\frac{a}{\tau^2}\right)$ und daher

$$\Phi(a) = \sum_{\tau} \psi\left(\frac{a}{\tau^2}\right),$$

wo τ^2 alle quadratischen Teiler von a durchläuft. Mit Hilfe des *Möbius*schen Zeichens $\mu(k)$ kann man umgekehrt $\psi(a)$ durch $\Phi(a)$ ausdrücken:

$$\psi(a) = \sum_{\tau} \mu(\tau) \cdot \Phi\left(\frac{a}{\tau^2}\right).$$

Für teilerfremde Zahlen k und k' ist $\mu(kk') = \mu(k) \cdot \mu(k')$ und $\Phi(kk') = \Phi(k) \cdot \Phi(k')$. Daher ist auch $\psi(kk') = \psi(k) . \psi(k')$, und daraus folgt, daß $\psi(a)$ gleich der bekannten Funktion

$$\psi(a) = a \cdot \left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p_2}\right) \cdots$$

ist, wo $p_1, p_2, \ldots$ die verschiedenen in a aufgehenden Primzahlen sind; $\psi(1)$ ist gleich 1.

Der vorderen Komposition mit einem Einheitssystem entspricht eine affine Transformation der Ebene. Das zu (a_{ik}) gehörige Punktgitter bleibt jetzt im allgemeinen nicht unverändert, wohl aber wieder die Determinante und der Koordinatenteiler. Außerdem stimmen zwei affine Systeme in der Verteilung der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande ihrer Parallelogramme überein. Durch die vordere Komposition wird nämlich jedem Gitterpunkt eines zu (a_{ik}) gehörigen Parallelogramms ein Gitterpunkt mit demselben größten gemeinsamen Teiler der beiden Koordinaten in dem zu dem affinen System gehörigen entsprechenden Parallelogramm zugewiesen. Drei in gerader Linie liegenden Gitterpunkten entsprechen drei ebensolche Punkte und das Verhältnis, nach dem die Entfernung zweier Gitterpunkte durch einen dritten Gitterpunkt geteilt wird, bleibt bei vorderer Komposition ungeändert. Gitterpunkten auf parallelen Geraden entsprechen ebenso gelegene Gitterpunkte. Zwei affine Systeme sind, wie dieses Verhalten der Gitterpunkte bezeichnet werden möge, von demselben Typus.

Da auch jetzt wieder jedes System zu einem einzigen System von der Form

$$\begin{pmatrix} d & r \\ 0 & d' \end{pmatrix},$$

wo $dd' = a$, $d > 0$, $d' > r \geqq 0$, affin ist, so ist die Anzahl der nicht affinen Systeme mit der Determinante a gleich $\Phi(a)$.

Bei gleichzeitiger vorderer und hinterer Komposition mit je einem Einheitssystem bleibt die Determinante und der Koordinatenteiler unverändert. Da jedes System mit einem einzigen System von der Form

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

äquivalent ist, so ist die Anzahl der nicht äquivalenten Systeme der Determinante a gleich der Anzahl der verschiedenen in a enthaltenen quadratischen Faktoren, also gleich der Teileranzahl der größten Zahl, deren Quadrat in a aufgeht.

§ 3.

Eine Ergänzung zu der Angabe über die Anzahl der nicht affinen Systeme wird sich durch die Beantwortung der Frage ergeben, ob zwei nicht affine reduzierte Systeme derselben Determinante von gleichem Typus sein können. Wenn man einen Eckpunkt eines Parallelogramms, z. B. den Nullpunkt bei P_a vor den übrigen auszeichnet, so ist das nicht der Fall. Tut man das aber nicht — und auf diesen Standpunkt muß man sich bei dieser geometrischen Betrachtung stellen — so darf man z. B. die nicht affinen Systeme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, wo $a > 1$ ist, oder $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, wo $a > 2$ ist, in bezug auf die Verteilung der Gitterpunkte in ihren Parallelogrammen nicht als wesentlich verschieden ansehen. Bei den beiden letzten Systemen liegen z. B. alle Gitterpunkte auf einer Diagonale, wenn bei $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ nicht der Nullpunkt, sondern der Punkt $1|0$ mit zum Innern des Parallelogramms gerechnet wird.

Die Aufgabe, alle Typen der Determinante a zu finden, läßt sich leicht erledigen, wenn man erst die Anzahl der verschiedenen Typen für die Reihe der $\varphi(a)$ Systeme $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & a \end{pmatrix}$ bestimmt hat, wo r relativ prim zu a ist. Bei diesen Systemen liegen auf den Seiten des Parallelogramms $OA_1A_3A_2$ außer den Eckpunkten keine Gitterpunkte. Auf jeder Parallelen zur Grund-

linie OA_1 mit ganzzahligem Abstand von ihr liegt genau ein Gitterpunkt in dem Parallelogramm. Dieser teilt die Strecke von der Länge 1, auf der er liegt, wenn sie die Entfernung h von der Grundlinie hat, nach dem Verhältnis $h(a-r):hr$, wo der Zähler und der Nenner durch ihren kleinsten positiven Rest (mod a) zu ersetzen sind, und der Nenner sich auf die an der Seite A_1A_3 liegende Teilstrecke bezieht. Andererseits liegen die Gitterpunkte innerhalb des Parallelogramms so auf $a-1$ äquidistanten Parallelen zu der Seite A_1A_3, daß wieder auf jeder dieser parallelen Strecken ein Gitterpunkt liegt. Wenn nun der Gitterpunkt, der auf der der Seite A_1A_3 nächsten parallelen Strecke liegt, diese nach dem Verhältnis $(a-r'):r'$ teilt, wo der Nenner sich auf die an A_3A_2 liegende Teilstrecke bezieht, so ist das System $\binom{1\ r}{0\ a}$ von demselben Typus wie $\binom{1\ r'}{0\ a}$. Denn durch das Verhältnis $(a-r'):r'$ auf der ersten Parallelen sind wieder die entsprechenden Verhältnisse auf den übrigen Parallelen bestimmt. Der Seite $OA'_1(=OA_1)$ des zweiten Parallelogramms entspricht dabei die Seite A_1A_3 des ersten.

Es ist nun zu untersuchen, wann $r=r'$ ist. Der Gitterpunkt, der am nächsten an A_1A_3 liegt, ist der, für den $hr\equiv 1 \pmod a$ ist. Ist h_1 die kleinste positive Lösung dieser Kongruenz, hat also der nächste Gitterpunkt an A_1A_3 die Entfernung h_1 von OA_1, so ist $a-r'=h_1$, und wenn $r'=r$ sein soll, muß $(a-r)r\equiv 1$ oder $r^2\equiv -1 \pmod a$ sein. Diese Kongruenz ist nicht lösbar, wenn a durch 4 oder durch eine Primzahl von der Form $4n+3$ teilbar ist. Wenn mindestens eine dieser Bedingungen erfüllt ist, so entsprechen den $\varphi(a)$ Systemen also nur $\frac{1}{2}\varphi(a)$ verschiedene Typen; ist aber $a=P$ oder $=2P$, wo P nur Primfaktoren von der Form $4n+1$ enthält, so ist die Anzahl der Typen gleich $\frac{1}{2}\varphi(a)+2^{\mu-1}$, wo $\mu\geqq 1$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von P bedeutet. Denn die Anzahl der Lösungen der Kongruenz $r^2\equiv -1 \pmod a$ ist gleich 2^μ, und die Hälfte dieser Zahl ist zu $\frac{1}{2}\varphi(a)$ noch hinzuzufügen, da die eine Hälfte der entsprechenden 2^μ Typen in $\frac{1}{2}\varphi(a)$ schon mitgezählt ist. Die Formel gilt auch für $\mu=0$.

Ist $\binom{1\ r}{0\ a}$ ein reduziertes System, wo r mit a den größten gemeinsamen Teiler $d>1$ hat, so können unter den $\varphi(d')$ Systemen $(d'=a:d)$, für die dieser Fall eintritt, keine zwei denselben Typus haben, weil die Seite OA_1, auf der außer O und A_1 kein Gitterpunkt liegt, mit der Seite A_1A_3, auf der außer A_1 und A_3 noch $d-1$ Gitterpunkte liegen, nicht mehr ver-

tauschbar ist, aber ein solches System ist mit einem der $\varphi(d')$ Systeme $\binom{d\ \ r}{0\ \ d'}$, wo $(r, d') = 1$ ist, von demselben Typus. Ein System, dessen Typus von allen übrigen abweicht, kann sich nur ergeben, wenn in $\binom{d\ \ r}{0\ \ d'}$ der größte gemeinsame Teiler von r und d' gleich d ist, wenn also das System den Koordinatenteiler d hat. Das entsprechende Parallelogramm zerfällt dann in d^2 kongruente Parallelogramme, auf deren Seiten außer den Eckpunkten keine Gitterpunkte liegen, die also von derselben Beschaffenheit sind, wie die soeben genauer untersuchten Parallelogramme, für die $d=1$ war. Wenn $a : d^2$ weder durch 4, noch durch eine Primzahl von der Form $4n+3$ teilbar ist, sondern nur durch μ' Primzahlen von der Form $4n+1$ und vielleicht durch 2, so erhält man $2^{\mu'}$ Systeme, deren Typus nur einmal auftritt. Hieraus folgt, daß die Anzahl $\chi(a)$ der Typen gleich $\frac{1}{2}\Phi(a)$ ist, wenn a auch nur eine Primzahl von der Form $4n+3$ in einer ungeraden Potenz enthält. Ist aber $a = 2^{\varepsilon}. P. Q^2$, wo $\varepsilon = 0$ oder 1 ist und P nur aus Primzahlen von der Form $4n+1$, Q nur aus Primzahlen von der Form $4n+3$ und der Primzahl 2 zusammengesetzt ist, so ist $\chi(a) = \frac{1}{2}\Phi(a) + \frac{1}{2}\varrho$, wo die Anzahl ϱ der nur einmal vorhandenen Typen noch zu bestimmen ist.

Der Koordinatenteiler eines der gesuchten Systeme muß jedenfalls durch Q teilbar sein. Ist er gleich dQ, so sind die gesuchten reduzierten Systeme mit diesem Koordinatenteiler von der Form $\binom{dQ\ \ rdQ}{0\ \ d_1 dQ}$, wo $(r, d_1) = 1$ ist. Denn wenn die erste Koordinate größer als dQ wäre, so würden auf der Seite OA_1 mehr als $dQ-1$ Gitterpunkte außer O und A_1 liegen und OA_1 wäre mit $A_1 A_3$ nicht vertauschbar. Aus demselben Grunde darf (r, d_1) nicht von 1 verschieden sein. Unter den $\varphi(d_1)$ Systemen dieser Art sind dann ebenso viele mit nur einmal vorkommendem Typus wie unter den $\varphi(d_1)$ Systemen $\binom{1\ \ r}{0\ \ d_1}$, d. h. $2^{\mu''}$, wenn μ'' die Anzahl der in d_1 enthaltenen verschiedenen ungeraden Primfaktoren ist. Nun ist $d_1 = 2^{\varepsilon} \cdot P : d^2$; jedem quadratischen Faktor d^2 von P entspricht ein d_1. Setzt man

$$P = p_1^{2\alpha_1+1} \cdot p_2^{2\alpha_2+1} \cdots p_\nu^{2\alpha_\nu+1} \cdot p_{\nu+1}^{2\beta_1} \cdot p_{\nu+2}^{2\beta_2} \cdots p_{\nu+\lambda}^{2\beta_\lambda},$$

so kann man aus dieser Zahl

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_\nu+1)\cdot\beta_1\cdot\beta_2\cdots\beta_\lambda$$

verschiedene derartige quadratische Faktoren herausgreifen, daß der komplementäre Teiler von P noch alle $\nu+\lambda$ Primfaktoren $p_1, \ldots p_{\nu+\lambda}$ enthält.

Die Primzahlen $p_1, p_2, \dots p_\nu$ mit ungeradem Exponenten bleiben überhaupt in jedem komplementären Teiler vertreten, dagegen können die Primzahlen $p_{\nu+1}, \dots p_{\nu+\lambda}$ zum Teil oder alle in dem komplementären Teiler fehlen. So gibt es z. B.

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_\nu+1)\cdot(\beta_1\beta_2\cdots\beta_{\lambda-1}+\beta_1\beta_2\cdots\beta_{\lambda-2}\cdot\beta_\lambda+\cdots+\beta_2\beta_3\cdots\beta_\lambda)$$

quadratische Teiler von P, deren komplementäre Teiler nur noch $\nu+\lambda-1$ verschiedene Primfaktoren enthalten, usw. In

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_\nu+1)\cdot(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\lambda)$$

Fällen hat der komplementäre Teiler nur noch $\nu+1$ und endlich

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_\nu+1)\text{-mal}$$

nur ν verschiedene Primfaktoren.

Die gesuchte Zahl ϱ ist also

$$2^\nu\cdot(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_\nu+1)\cdot\{\beta_1\cdot\beta_2\cdots\beta_\lambda\cdot 2^\lambda+(\beta_1\beta_2\cdots\beta_{\lambda-1}+\cdots)\cdot 2^{\lambda-1}+\cdots$$
$$+(\beta_1+\beta_2+\cdots)\cdot 2+1\}$$
$$=(2\alpha_1+2)(2\alpha_2+2)\cdots(2\alpha_\nu+2)(2\beta_1+1)(2\beta_2+1)\cdots(2\beta_\lambda+1),$$

d. h. einfach gleich der Anzahl der Teiler von P. Man sieht leicht, daß das Resultat auch für $P=1$ gültig bleibt. Damit ist der folgende geometrische Satz bewiesen:

Die Anzahl der in bezug auf die Verteilung der in ihnen liegenden Gitterpunkte wesentlich verschiedenen Parallelogramme mit dem ganzzahligen Flächeninhalt a, deren Eckpunkte Gitterpunkte sind, ist

$$\chi(a)=\frac{1}{2}\Phi(a)+\frac{1}{2}\eta\cdot\varrho.$$

Dabei ist $\Phi(a)$ die Summe aller Teiler von a, ϱ die Anzahl der Teiler von a, die nur aus Primzahlen von der Form $4n+1$ bestehen, einschließlich des Teilers 1, und $\eta=0$ oder 1, je nachdem in a mindestens eine Primzahl von der Form $4n+3$ einen ungeraden Exponenten hat oder nicht.

§ 4.

Die nun noch folgenden Untersuchungen beruhen auf dem Begriff der Teilbarkeit eines Systems durch ein anderes. Man nennt gewöhnlich ein erstes System teilbar durch ein zweites, wenn dieses durch vordere und hintere Komposition mit ganzzahligen Systemen in das erste übergeführt werden kann. Dabei ergeben sich bekanntlich Teilbarkeitsgesetze, die sehr einfach sind und eine große Analogie mit der gewöhnlichen Zahlentheorie aufweisen. Wenn ich trotzdem eine der speziellen Äquivalenz, die bei assoziierten Systemen stattfindet, entsprechende engere Definition der Teilbarkeit zugrunde lege, so rechtfertigt sich das durch die einfache geometrische Beziehung, in der hierbei ein System zu seinen Teilern steht.

Das System (b_{ik}) heiße durch (a_{ik}) teilbar, wenn die Gleichung

$$(b_{ik}) = (a_{ik})[\alpha_{ik}] = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21} & a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} \\ a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} & a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} \end{pmatrix}$$

besteht, wo die α_{ik} ganze Zahlen sind. Das durch (b_{ik}) bestimmte Punktgitter hat dann nur solche Punkte, die zugleich Punkte des zu (a_{ik}) gehörigen Gitters sind. Es möge hervorgehoben werden, daß das System (α_{ik}) im allgemeinen kein Teiler von (b_{ik}) ist. Jedes mit (b_{ik}) assoziierte System ist durch jedes mit (a_{ik}) assoziierte System teilbar. Ein Teiler von (a_{ik}) geht auch in (b_{ik}) auf.

Die Sätze über die Teilbarkeit ergeben sich am einfachsten, wenn man sich über die nicht assoziierten Systeme derselben Determinante a die folgende geometrische Übersicht verschafft. Man bezeichne die Gitterpunkte der $\Phi(a)$ verschiedenen Punktgitter, die zu den $\Phi(a)$ nicht assoziierten Systemen gehören, mit Nummern und zwar alle Gitterpunkte, die dem reduzierten System $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ entsprechen, mit der Nummer 1, alle, die zu dem Gitter von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ gehören, mit 2 usw., alle, die zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & a \end{pmatrix}$ gehören, mit a. Ist ferner d_1 der kleinste von 1 verschiedene Teiler von a, so werden die Punkte des Gitters von $\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & a:d_1 \end{pmatrix}$ alle mit $a+1$ bezeichnet usw., endlich die zu $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gehörigen Gitterpunkte mit der Nummer $\Phi(a)$. Hat man alle Gitterpunkte in dem Quadrat Q_a mit den Ecken $0|0, a|0\ a|a, 0|a$ mit ihren Nummern versehen, so ist die Nummerierung für alle Gitterpunkte der Ebene bekannt, da in allen kongruenten Quadraten, deren Eckpunkte durch a teilbare Koordinaten haben, die Nummern in derselben Weise wiederkehren.

Die so mit Nummern bedeckte Ebene werde mit E_a bezeichnet. Für $a=4$ ist z. B. das Quadrat Q_4 das folgende:

7.	4.	6.	2.
$\frac{65}{7}$.	3.	$\frac{24}{5}$.	3.
7.	2.	6.	4.
$\frac{1234}{567}$.	1.	$\frac{13}{5}$.	1.

Der Nullpunkt und die Seiten auf den Achsen werden zum Innern von Q_a gerechnet.

Man überzeugt sich leicht davon, daß auf diese Weise der Punkt $x|y$ mit $\Phi(x, y, a)$ — so schreibe ich kürzer statt $\Phi((x, y, a))$ — Nummern versehen wird. Von diesen Nummern mögen $\Psi((x, y); a)$ zu primitiven Systemen gehören. Dann gehören $\Psi\left(\frac{(x, y)}{\tau}; \frac{a}{\tau^2}\right)$ Nummern an $x|y$ zu Systemen mit dem Koordinatenteiler τ, vorausgesetzt, daß x und y beide durch τ teilbar sind; nur an solchen Punkten kommen derartige Nummern vor. Das folgt sofort daraus, daß die Ebene, die aus E_a dadurch hervorgeht, daß nur die Gitterpunkte, deren (x, y) durch τ teilbar ist, mit den Nummern derjenigen Systeme der Determinante a bezeichnet werden, deren Koordinatenteiler durch τ teilbar ist, ein linear τ-mal vergrößertes Bild der Ebene $E_{a:\tau^2}$ ist, wobei nur an die Stelle jeder Nummer von $E_{a:\tau^2}$ eine bestimmte Nummer von E_a tritt. Deshalb ist auch

$$\sum_{\tau} \Psi\left(\frac{(x, y)}{\tau}; \frac{a}{\tau^2}\right) = \Phi(x, y, a),$$

$$\text{(1.)} \qquad \Psi((x, y); a) = \sum_{\tau}{}' \mu(\tau)\, \Phi\left(\frac{x}{\tau}, \frac{y}{\tau}, \frac{a}{\tau^2}\right),$$

$$\text{(2.)} \qquad \sum_{\varkappa} \Psi\left(\frac{(x, y)}{\tau\varkappa}; \frac{a}{\tau^2\varkappa^2}\right) = \Phi\left(\frac{x}{\tau}, \frac{y}{\tau}, \frac{a}{\tau^2}\right).$$

In den beiden ersten Summen durchläuft τ alle Teiler von (x, y), deren Quadrat in a aufgeht, in der letzten ist τ eine beliebige dieser Zahlen und für $\varkappa$ sind alle Zahlen zu setzen, die mit τ multipliziert, in (x, y) aufgehen, während a durch $\tau^2\varkappa^2$ teilbar ist. Der Ausdruck $\Phi\left(\frac{x}{\tau}, \frac{y}{\tau}, \frac{a}{\tau^2}\right)$ gibt die Anzahl der Nummern an $x|y$ an, die zu Systemen mit durch τ teilbarem Koordinatenteiler gehören.

Um die Funktion Ψ auf bekannte Funktionen zurückzuführen, beachte man, daß für relativ prime Zahlen k und k' nach (1.) $\Psi((x,y);kk') = \Psi((x,y);k)\cdot\Psi((x,y);k')$ ist. Da nun für $k=p^\sigma$, $(\sigma \gtreqless 2)$, wenn (x,y) die Primzahl p in der Potenz $p^{\sigma'}$ $(\sigma' \gtreqless 1)$ enthält, $\Psi((x,y);p^\sigma) = \Phi(x,y,p^\sigma) - \Phi\left(\frac{x}{p},\frac{y}{p},p^{\sigma-2}\right) = p^{\sigma'}$ oder $= p^\sigma + p^{\sigma-1} = \psi(p^\sigma)$ ist, je nachdem $\sigma' < \sigma$ oder $\sigma' \gtreqless \sigma$ ist, so ergibt sich für Ψ die folgende Bestimmung:

> $\Psi((x,y);a)$ ist gleich dem Produkt derjenigen Primzahlpotenzen von (x,y), die in (x,y) mit einem kleineren Exponenten als in a vorkommen, multipliziert mit der Funktion $\psi(\bar{a})$, wo $\bar{a}$ aus den Primzahlpotenzen von a gebildet ist, die in a mit einem nicht größeren Exponenten als in (x,y) auftreten.

So ist z. B. $\Psi((6,6);60) = 2\cdot\psi(3) = 8$. $\Psi((x,y);a)$ ist gleich 1, wenn mindestens eins der beiden Argumente gleich 1 ist.

§ 5.

Über die Geometrie der Ebene E_a will ich hier nur einige Worte sagen.*) Geht man von O aus in irgendeiner Richtung mit rationalem Richtungskoeffizienten vorwärts, so ist der erste Gitterpunkt, den man dabei antrifft, ein solcher, für den $(x,y)=1$ ist, für den nächsten ist $(x,y)=2$ usw. An dem ersten Gitterpunkt steht immer nur eine Nummer, an dem zweiten eine Nummer oder $\Phi(2)=3$ Nummern, je nachdem $a \equiv 1$ oder $0 \pmod 2$ ist usw. Der a-te Gitterpunkt, auf den man so kommt, ist immer ein Gitterpunkt des durch Q_a bestimmten Quadratgitters. Es ist klar, daß die Nummer, die man zuerst erreicht, sich bei jedem Gitterpunkt derselben Richtung wiederholt. Denkt man sich durch alle Punkte des durch Q_a bestimmten Gitters sämtliche Geraden mit rationalem Richtungskoeffizienten gezogen, so sind unter diesen Geraden immer nur $\psi(a)$, die sich hinsichtlich der auf ihnen befindlichen Nummern von einander unterscheiden, und zwar ist jede an der zu einem der $\psi(a)$ primitiven Systeme gehörigen Nummer

*) Den Fall, wo $a=0$ ist, habe ich in einer Arbeit „Über eine *Kronecker*sche Beziehung zwischen Geometrie und Zahlentheorie“ (Math. Ann. Bd. 60, S. 285) etwas ausführlicher behandelt; er ist deshalb einfacher als der Fall $a>0$, weil jeder Gitterpunkt schon durch eine einzige Nummer gekennzeichnet werden kann. Vergl. *Kronecker*s Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von *K. Hensel* (Leipzig 1901), Bd. 1, S. 242.

kenntlich, die an jedem ihrer Gitterpunkte steht. Durch den Punkt $x|y$ gehen $\Psi((x, y); a)$ in diesem Sinne von einander verschiedene Geraden.

Man kann fragen, welche Bedingung die Richtungskoeffizienten zweier Geraden des Nullpunktes erfüllen müssen, damit sie dieselben Nummern tragen. Diese Bedingung besteht darin, daß die als reduzierte Brüche vorausgesetzten Richtungskoeffizienten $m:n$ und $m':n'$ der Gleichung

$$\frac{m}{n}=\frac{m'+ka}{n'+la},$$

wo k und l beliebige ganze Zahlen sind, genügen. Denn das System $\binom{m\,m'}{n\,n'}$ ist, weil seine Determinante ein Vielfaches von a ist, durch ein System (a_{ik}) teilbar; die einzige Nummer, die an $m|n$ steht, ist also dieselbe wie die an $m'|n'$, woraus die Behauptung folgt. Umgekehrt läßt sich auch leicht zeigen, daß wenn an den Punkten $m|n$ und $m'|n'$, wo $(m, n)=(m', n')=1$ ist, dieselbe Nummer steht, wenn also $mn'-m'n\equiv 0 \pmod a$ ist, zwischen m, n, m', n' eine Beziehung von der angegebenen Form besteht. So ist z. B. $3:1=(1-4):(3-4)$ und deshalb sind die Geraden mit den Richtungskoeffizienten $3:1$ und $1:3$ gleichbezeichnet in E_4.

Durch die affine Transformation $\binom{\alpha\,\beta}{\gamma\,\delta}$, wo $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ ist, werden die $\psi(a)$ verschieden bezeichneten Geraden des Nullpunktes permutiert. Die Gerade mit dem Richtungskoeffizienten $m:n$ geht in die mit dem Richtungskoeffizienten $(n\gamma+m\delta):(n\alpha+m\beta)$ über. Diese Gerade ist hinsichtlich ihrer Nummern von $(n\gamma'+m\delta'):(n\alpha'+m\beta')$ nicht verschieden, wenn $\alpha\equiv\alpha'$, $\beta\equiv\beta'$, $\gamma\equiv\gamma'$, $\delta\equiv\delta' \pmod a$ ist, so daß man nur die Transformationen einer Kongruenzgruppe (mod a) anzuwenden braucht, um alle möglichen Veränderungen in bezug auf die Nummern von E_a zu erhalten. Aber es gibt auch Transformationen innerhalb dieser Gruppe, die keine Veränderung der Nummern bewirken. Denn wenn

$$\frac{n\gamma+m\delta}{n\alpha+m\beta}=\frac{m+ka}{n+la}$$

ist für jedes m und n, so führt die Transformation $\binom{\alpha\,\beta}{\gamma\,\delta}$ alle $\psi(a)$ verschiedenen Geraden des Nullpunktes in gleichbezeichnete Geraden über. Damit diese Gleichung bestehe, ist die Kongruenz

$$n^2\gamma-m^2\beta+mn(\delta-\alpha)\equiv 0 \pmod a$$

zu erfüllen, es muß also $\alpha \equiv \delta$, $\beta \equiv 0$, $\gamma \equiv 0 \pmod{a}$ sein. Daher gibt es so viele derartige Transformationen wie es Lösungen der Kongruenz $\alpha^2 \equiv 1 \pmod{a}$ gibt, und die Kongruenzgruppe ist deshalb mit einer Permutationsgruppe der $\psi(a)$ verschiedenen Geraden 2^μ-stufig isomorph, wenn 2^μ die bekannte Anzahl der Lösungen dieser Kongruenz ist.

§ 6.

Mit Hilfe der Ebene E_a läßt sich die Frage nach den Systemen (a_{ik}) mit gegebener Determinante a beantworten, die durch ein gegebenes System (c_{ik}), dessen Determinante c in a aufgeht, teilbar sind. Zunächst kann man die Anzahl der nicht assoziierten Systeme (a_{ik}), die durch (c_{ik}) teilbar sind, leicht angeben. Soll $(c_{ik})[\gamma_{ik}] = (a_{ik})$ und auch $(c_{ik})[\gamma'_{ik}] = (a_{ik})\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ sein, so ist

$$(c_{ik}) \cdot [\gamma_{ik}]\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{bmatrix} = (c_{ik})[\gamma'_{ik}].$$

Daraus folgt, da diese Gleichung richtig bleibt, wenn man auf beiden Seiten das System (c_{ik}) mit von Null verschiedener Determinante wegläßt,

$$(\gamma_{ik})\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{bmatrix} = (\gamma'_{ik}),$$

d. h. die Systeme (γ_{ik}) und (γ'_{ik}) sind assoziiert. Sollen also die Resultate der hinteren Komposition nicht assoziiert sein, so dürfen die Systeme (γ_{ik}) und (γ'_{ik}) nicht assoziiert sein. Die Anzahl der nicht assoziierten Systeme (a_{ik}), die durch das System (c_{ik}) teilbar sind, ist daher gleich $\Phi(a:c)$, da die Determinante von (γ_{ik}) gleich $a:c$ ist.

Ein beliebiges mit (a_{ik}) assoziiertes System werde jetzt mit $(a; \tau)_t$ bezeichnet, wo τ der Koordinatenteiler und t die Nummer des Systems ist. Dann kann man für $(a; \tau)_t$ auf unendlich viele Weisen die „Normalform“

$$\begin{pmatrix} \xi\tau & \xi'\dfrac{a}{\tau} \\ \eta\tau & \eta'\dfrac{a}{\tau} \end{pmatrix}$$

aufstellen, wo $\xi\eta' - \eta\xi' = 1$ ist. Denn man braucht zunächst für ξ und η nur zwei teilerfremde Zahlen so anzunehmen, daß $\eta:\xi$ gleich dem Richtungskoeffizienten einer solchen Geraden des Nullpunktes ist, auf der die Nummer t bei jedem Gitterpunkt, für den (x, y) ein Vielfaches von τ ist, vorkommt.

Da ferner an jedem Punkt, dessen (x, y) durch $a:\tau$ teilbar ist, alle Nummern der Systeme stehen, deren Koordinatenteiler durch τ teilbar ist, insbesondere auch alle Nummern der Systeme, deren Koordinatenteiler τ ist, so hat man ξ' und η' nur noch so zu bestimmen, daß $\xi\eta' - \eta\xi' = 1$ ist, um ein Normalsystem für $(a;\tau)_t$ zu erhalten. Diese Normalform hat vor der reduzierten Form eines Systems den Vorzug, daß schon der eine Punkt $\xi\tau|\eta\tau$ das System vollständig kennzeichnet, da an diesem Punkte wegen $(\xi, \eta) = 1$ in E_a nur eine Nummer steht, die sich auf ein System mit dem Koordinatenteiler τ bezieht.

Unter Benutzung eines solchen Normalsystems für (c_{ik}) möge nun, wenn σ der Koordinatenteiler von (c_{ik}), dieses also ein System $(c;\sigma)_s$ ist,

$$\text{(1.)} \qquad \begin{pmatrix} \xi\sigma & \xi'\dfrac{c}{\sigma} \\ \eta\sigma & \eta'\dfrac{c}{\sigma} \end{pmatrix} [\gamma_{ik}] = (a_{ik})$$

sein. Dann ist auch

$$\text{(2.)} \qquad \begin{pmatrix} \xi\sigma & \xi'\dfrac{c}{\sigma} \\ \eta\sigma & \eta'\dfrac{c}{\sigma} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{a}{c} & 0 \\ 0 & \dfrac{a}{c} \end{bmatrix} = (a_{ik}) \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{22} & -\gamma_{12} \\ -\gamma_{21} & \gamma_{11} \end{bmatrix},$$

wo mit dem rechts hinzugekommenen System beiderseits hinten komponiert ist. Die Gleichung (1.) ist auch eine Folge von (2.). Die linke Seite von (2.) ist

$$\text{(3.)} \qquad \begin{pmatrix} \xi\sigma\dfrac{a}{c} & \xi'\dfrac{a}{\sigma} \\ \eta\sigma\dfrac{a}{c} & \eta'\dfrac{a}{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Die Systeme (a_{ik}), die Teiler dieses Systems sind, deren Nummern in E_a also an den beiden Punkten dieses Systems zugleich vorkommen, sind nach (2.) und (1.) die gesuchten Vielfachen von (c_{ik}). Da die Nummern der Systeme (a_{ik}), deren Koordinatenteiler durch σ teilbar ist, sämtlich an dem Punkte $\xi'\dfrac{a}{\sigma} \Big| \eta'\dfrac{a}{\sigma}$ vorkommen, so braucht man in E_a nur die Nummern des Punktes $\xi\sigma\dfrac{a}{c} \Big| \eta\sigma\dfrac{a}{c}$, die zu Systemen gehören, deren Koordinatenteiler durch σ teilbar sind, aufzusuchen, um alle gesuchten Systeme (a_{ik}) zu

erhalten. Ihre Anzahl ist, wie schon auf andere Weise gefunden wurde, nach § 4, Gleichung (2.)

$$\Phi\left(\frac{\xi\sigma\frac{a}{c}}{\sigma}, \frac{\eta\sigma\frac{a}{c}}{\sigma}, \frac{a}{\sigma^2}\right) = \Phi\left(\frac{a}{c}\right),$$

da $a:\sigma^2$ durch $a:c$ teilbar ist.

Hat man die Ebenen E_c und E_a beide hergestellt, so findet man demnach die Systeme (a_{ik}), die durch (c_{ik}) oder $(c;\sigma)_s$ teilbar sind, dadurch, daß man sich die linear $a:c$-mal vergrößerte Ebene E_c auf E_a gelegt denkt, so daß die Achsen zusammenfallen und die Gitterpunkte der vergrößerten Ebene E'_c auf den Punkten von E_a liegen, deren (x, y) durch $a:c$ teilbar ist. Sucht man dann einen Gitterpunkt von E'_c auf, an dem die Nummer s von (c_{ik}) die einzige ist, die einem System mit dem Koordinatenteiler σ entspricht, so geben diejenigen Nummern des mit diesem Punkte zusammenfallenden Punktes von E_a, die zu solchen Systemen (a_{ik}) gehören, deren Koordinatenteiler ein Vielfaches von σ ist, die Systeme (a_{ik}) an, die durch (c_{ik}) teilbar sind.

§ 7.

Auf die soeben gelöste Aufgabe kann nun die Fundamentalaufgabe zurückgeführt werden, zu bestimmen, wie viele und welche Systeme (a_{ik}) Teiler eines gegebenen Systems (b_{ik}) oder $(b;\varrho)_r$ sind, dessen Determinante b durch a teibar ist. Eine Normalform von (b_{ik}) sei

$$(1.) \qquad \begin{pmatrix} \xi\varrho & \xi'\frac{b}{\varrho} \\ \eta\varrho & \eta'\frac{b}{\varrho} \end{pmatrix}, \quad \xi\eta' - \eta\xi' = 1.$$

Dann sind in E_a die Nummern von Systemen (a_{ik}) zu bestimmen, die zugleich an den Punkten $\xi\varrho|\eta\varrho$ und $\xi'\frac{b}{\varrho}\Big|\eta'\frac{b}{\varrho}$ stehen. Da an diesen Punkten dieselben Nummern sich befinden wie an $\xi\cdot(\varrho, a)|\eta\cdot(\varrho, a)$ und $\xi'\cdot\left(\frac{b}{\varrho}, a\right)\Big|\eta'\cdot\left(\frac{b}{\varrho}, a\right)$, so kann man an Stelle von (1.) das System

$$(2.) \qquad \begin{pmatrix} \xi\cdot(\varrho, a) & \xi'\cdot\left(\frac{b}{\varrho}, a\right) \\ \eta\cdot(\varrho, a) & \eta'\cdot\left(\frac{b}{\varrho}, a\right) \end{pmatrix}$$

untersuchen. Es gibt, wie sich zeigen wird, ein System (c_{ik}) oder $(c;\sigma)_s$, das gerade in allen gesuchten Systemen (a_{ik}) aufgeht. Um es zu bestimmen, setze man (2.) nach (3.) von § 6 gleich

$$\begin{pmatrix} \xi\sigma\frac{a}{c} & \xi'\frac{a}{\sigma} \\ \eta\sigma\frac{a}{c} & \eta'\frac{a}{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Aus dieser Gleichsetzung folgt

$$\frac{a^2}{c}=(\varrho,a)\Big(\frac{b}{\varrho},a\Big) \tag{3.}$$

oder

$$c=\frac{a^2}{(\varrho,a)\Big(\frac{b}{\varrho},a\Big)}=\frac{a^2}{\Big(b,a\frac{b}{\varrho},a\varrho,a^2\Big)}=\frac{a}{\Big(\frac{b}{a},\varrho,a\Big)},$$

da $b:\varrho$ aus der Klammer weggelassen werden kann, weil es durch ϱ teilbar ist. Es ist ferner nach (3.)

$$\frac{a}{c}=\Big(\frac{b}{a},\varrho,a\Big), \tag{4.}$$

$$\sigma=(\varrho,a):\frac{a}{c}=\frac{a}{\Big(\frac{b}{\varrho},a\Big)},$$

$$\frac{c}{\sigma}=\frac{a}{(\varrho,a)}.$$

Also ist

$$(c;\sigma)_s=\begin{pmatrix} \xi\dfrac{a}{\Big(\frac{b}{\varrho},a\Big)} & \xi'\dfrac{a}{(\varrho,a)} \\ \eta\dfrac{a}{\Big(\frac{b}{\varrho},a\Big)} & \eta'\dfrac{a}{(\varrho,a)} \end{pmatrix}. \tag{5.}$$

Daß dieses System ein Normalsystem ist, folgt daraus, daß $a:(\varrho,a)$ durch $a:\Big(\frac{b}{\varrho},a\Big)$ teilbar ist, weil ϱ in $b:\varrho$ aufgeht.

Nach § 6 ist damit die Anzahl der Systeme (a_{ik}) gefunden, die in $(b;\varrho)_r$ aufgehen, nämlich nach Gleichung (4.)

$$\Phi\Big(\frac{b}{a},\varrho,a\Big),$$

und diese Systeme selbst ergeben sich dadurch, daß man nach dem Verfahren des § 6 alle Systeme (a_{ik}) aufsucht, die durch das in (5.) angegebene System $(c; \sigma)_s$ teilbar sind. Die Systeme (a_{ik}) haben einen Koordinatenteiler, der durch $\sigma = a:\left(\frac{b}{\varrho}, a\right)$ teilbar ist, und wenn $\varkappa$ ein in ϱ enthaltenes Vielfaches von σ ist, dessen Quadrat in a aufgeht, so ist die Anzahl der Systeme (a_{ik}) mit dem Koordinatenteiler $\varkappa$, die in $(b; \varrho)_r$ aufgehen, gleich

$$\psi\left(\frac{(\varrho, a)}{\varkappa}; \frac{a}{\varkappa^2}\right).$$

Der letzte Teil des Satzes folgt nach § 4 aus (2.).

Ist z. B. $b = p^\pi$, $\varrho = p^\mu$, $a = p^\nu$, wo p eine Primzahl ist, so ist $(p^\pi; p^\mu)_r$ durch alle Systeme mit der Determinante p^ν teilbar, wenn $\nu \leqq \mu$ ist; σ ist dann gleich 1, und die Anzahl der Systeme (a_{ik}) mit dem Koordinatenteiler $\varkappa = p^\lambda \leqq p^{\frac{\nu}{2}}$ ist $\psi\left(\frac{a}{\varkappa^2}\right) = p^{\nu-2\lambda} + p^{\nu-2\lambda-1}$, wenn $\nu > 2\lambda$, $= 1$, wenn $\nu = 2\lambda$ ist. Wenn zwar $\nu > \mu$, aber $\mu - \lambda \geqq \nu - 2\lambda$ oder $\nu \leqq \mu + \lambda$ ist, so ist die genannte Anzahl ebenfalls gleich $\psi\left(\frac{a}{\varkappa^2}\right)$, wenn aber $\mu - \lambda < \nu - 2\lambda$ oder $\nu > \mu + \lambda$ ist, so ist sie gleich $p^{\mu-\lambda}$. Dabei ist $\sigma = p^{\nu-\pi+\mu}$, wenn $\nu > \pi - \mu$ ist; dann muß $\lambda \geqq \nu - \pi + \mu$, also $\nu \leqq \pi - \mu + \lambda$ sein. Natürlich ist immer $\lambda \leqq \mu$.

§ 8.

Zwei Gitterpunkte mögen in bezug auf das System (m_{ik}) homolog genannt werden, wenn sie zu den Gitterpunkten des durch (m_{ik}) bestimmten Punktgitters dieselbe Lage haben, wenn also ihre Koordinatendifferenzen $m_{11}\mu_{11} + m_{12}\mu_{21}$, $m_{21}\mu_{11} + m_{22}\mu_{21}$ sind, wo μ_{11}, μ_{21} ganze Zahlen bedeuten. Irgend ein Parallelogramm vom Inhalt m des zu (m_{ik}) gehörigen Punktgitters enthält demnach ein System von m nicht homologen Gitterpunkten in bezug auf (m_{ik}), und irgend ein anderer Gitterpunkt ist mit einem dieser m Punkte homolog. Während also die Verteilung der Gitterpunkte in den Parallelogrammen zweier assoziierten Systeme im Sinne des § 3 im allgemeinen wesentlich verschieden ist, ist doch jedem Gitterpunkt des einen ein homologer Punkt des anderen zugewiesen. Ist (m_{ik}) primitiv, so gibt es demnach Systeme von nicht homologen Punkten, die aus m auf einander

folgenden Gitterpunkten einer Geraden bestehen, da man den Typus eines zu (m_{ik}) assoziierten Systems in entsprechender Weise auswählen kann. Ein System von m nicht homologen Punkten in bezug auf (m_{ik}) kann zugleich ein solches in bezug auf ein mit (m_{ik}) nicht assoziiertes System mit demselben Koordinatenteiler sein, im allgemeinen trifft das jedoch nicht zu. Sind aber die Systeme nicht äquivalent, so kann eine solche Übereinstimmung überhaupt nicht stattfinden.

Von nun an werde die Voraussetzung, daß die Determinante eines Systems >0 sei, nicht immer beibehalten. Zwei Systeme (n_{ik}) und (r_{ik}) sollen in bezug auf ein drittes System (m_{ik}) — den Modul — für das $m>0$ ist, kongruent oder Reste von einander heißen, wenn die beiden Punkte N_1 und N_2 von (n_{ik}) beziehungsweise den beiden Punkten R_1 und R_2 von (r_{ik}) in bezug auf (m_{ik}) homolog sind. Definiert man die (assoziative und kommutative und mit jeder Komposition distributive) Addition und die Subtraktion zweier Systeme in bekannter Weise durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} \\ c'_{21} & c'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \pm c'_{11} & c_{12} \pm c'_{12} \\ c_{21} \pm c'_{21} & c_{22} \pm c'_{22} \end{pmatrix},$$

so ist die Kongruenz

$$(n_{ik}) \equiv (r_{ik}) \pmod{(m_{ik})}$$

gleichbedeutend mit der Gleichung

$$(1.) \qquad (n_{ik}) = (m_{ik})[\mu_{ik}] + (r_{ik}).$$

Da man jeden Punkt eines zu (m_{ik}) gehörigen vollständigen Systems von nicht homologen Punkten als einen Punkt R_1 und auch als einen Punkt R_2 auffassen kann, so gibt es m^2 verschiedene Reste des Moduls (m_{ik}), die zugleich in bezug auf jeden mit (m_{ik}) assoziierten Modul ein vollständiges Restsystem bilden.

Man kann in (1.) bei gegebenem (n_{ik}) und (m_{ik}) den Rest (r_{ik}) so bestimmen, daß, wenn (n_{ik}) durch (m_{ik}) teilbar ist, $(r_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, und wenn das nicht der Fall ist, $0<r<m$ wird. Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem folgenden, leicht zu beweisenden geometrischen Satze: Ein durch einen Eckpunkt eines gegebenen Parallelogramms und zwei beliebige in dem Parallelogramm liegende Punkte bestimmtes Parallelogramm ist kleiner als das gegebene Parallelogramm. Sucht man nun die homologen Punkte zu den Punkten N_1 und N_2 in dem Parallelogramm $O M_1 M_3 M_2$ von (m_{ik}) auf,

so werden diese Punkte, wenn nicht N_1 und N_2 homolog sind, von mindestens einem Eckpunkt des Parallelogramms aus gesehen so liegen, daß der zu N_2 homologe Punkt links von dem zu N_1 homologen Punkt liegt. Die relativen Koordinaten dieser beiden Punkte in bezug auf den genannten Eckpunkt von $O M_1 M_3 M_2$ nehme man als die Zahlen r_{ik} an, wodurch R_1 und R_2 bestimmt sind. Dann ist $0 < r < m$. Wenn die Punkte N_1 und N_2 homolog in bezug auf (m_{ik}) sind — in diesem Falle kann keiner von ihnen mit einem Gitterpunkt von (m_{ik}) zusammenfallen, außer wenn $(n_{ik}) \equiv \binom{0\,0}{0\,0}$ (mod (m_{ik})) ist —, so kann man als den erwähnten Eckpunkt von $O M_1 M_3 M_2$ den Nullpunkt nehmen und darauf den Punkt R_2, der mit R_1 zusammenfällt, durch den nächsten homologen Punkt ersetzen, der von O aus gesehen links von R_1 liegt. Dann ist wieder $0 < r < m$. Durch (r_{ik}) sind die Zahlen (μ_{ik}) in (1.) eindeutig bestimmt.

Nun kann man mit (m_{ik}) und (r_{ik}) genau so verfahren, wie vorher mit (n_{ik}) und (m_{ik}) und kommt durch diese dem *Euklid*ischen Algorithmus entsprechende Vorschrift, weil die Determinante der Reste immer kleiner wird, schließlich zu dem Rest $\binom{0\,0}{0\,0}$. Der vorhergehende Rest ist, wie ebenso gezeigt wird wie in der gewöhnlichen Zahlentheorie, ein größter gemeinsamer Teiler von (n_{ik}) und (m_{ik}), d. h. ein System, das durch alle gemeinsamen Teiler von (n'_{ik}) und (m_{ik}) teilbar ist. Das Verfahren ist wegen der Willkür, die in der Auswahl der Reste vorhanden ist, kein vollständig durch (n_{ik}) und (m_{ik}) bestimmtes, aber zwei verschiedene größte gemeinsame Teiler sind assoziiert, weil sie durch einander teilbar sind. Zwei Systeme heißen relativ prim zu einander, wenn ihr größter gemeinsamer Teiler die Determinante 1 hat.

§ 9.

Die zu zwei Systemen $(a;\tau)_t$ und $(a';\tau')_{t'}$ gehörigen Punktgitter haben gewisse Gitterpunkte gemeinsam, die ein System $(m;\sigma)_s$ bestimmen. Dieses System ist durch die beiden gegebenen Systeme teilbar und möge das kleinste gemeinsame Vielfache von $(a;\tau)_t$ und $(a';\tau')_{t'}$ heißen. Ist $m = a a'$, so sind $(a;\tau)_t$ und $(a';\tau')_{t'}$ relativ prim und umgekehrt; ist m ein echter Teiler von $a a'$, so haben $(a;\tau)_t$ und $(a';\tau')_{t'}$ einen größten gemeinsamen Teiler mit von 1 verschiedener Determinante. In dem ersten Falle soll

$(m;\sigma)_s$ **als das Produkt von** $(a;\tau)_t$ **und** $(a';\tau')_{t'}$ **bezeichnet und**

$$(m;\sigma)_s = (a;\tau)_t (a';\tau')_{t'}$$

gesetzt werden. Eine solche Gleichung enthält nur eine Aussage über die zu den darin vorkommenden Systemen gehörigen Punktgitter; das Zeichen $(a;\tau)_t$ **z. B. bedeutet ja irgend eins der unendlich vielen assoziierten Systeme, die in** E_a **durch die Nummer** t **gekennzeichnet sind. Diese Multiplikation, die sofort auf beliebig viele relativ prime Faktoren ausgedehnt werden kann, ist assoziativ und kommutativ. Es ist leicht, wenn man z. B. für** $(a;\tau)_t$ **und** $(a';\tau')_{t'}$ **die reduzierten Systeme wählt, die Koordinaten des Produktes und allgemeiner die des kleinsten gemeinsamen Vielfachen und auch die des größten gemeinsamen Teilers aus den Koordinaten der gegebenen Systeme zu bestimmen, doch kann das hier unterbleiben.**

Die Definition des Produktes führt zu dem folgenden Zerlegungssatz:

Sind die Determinante a und der Koordinatenteiler τ eines Systems in Primfaktoren zerlegt

$$a = \prod_{i=1}^{\nu} p_i^{\pi_i} \text{ und } \tau = \prod_{i=1}^{\nu} p_i^{\mu_i} \quad \left(0 \leqq \mu_i \leqq \frac{\pi_i}{2}\right),$$

so ist

$$(a;\tau)_t = \prod_{i=1}^{\nu} (p_i^{\pi_i}; p_i^{\mu_i})_{r_i}.$$

Jedes der Systeme rechts ist eindeutig bestimmt, denn nach dem Satz des § 7 ist $(a;\tau)_t$ nur durch ein System mit der Determinante $p_i^{\pi_i}$ teilbar, und zwar gerade durch ein System mit dem Koordinatenteiler $p_i^{\mu_i}$.

Wenn a gleich einer Primzahl p, also $\tau = 1$ ist, so ist $(p;1)_r$ nur durch sich selbst und durch das System mit der Determinante 1 teilbar. Ein solches System möge ein Primsystem heißen. Ist $a = p^\pi$ und $\tau = 1$, so ist $(p^\pi;1)_r$ nur durch je ein System von der Determinante p^σ $(\sigma = 0, 1, 2, \ldots \pi)$ teilbar. Wenn aber $\tau = p^\mu \left(0 < \mu \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ ist, so ist die Anzahl der Teiler mit der Determinante p^σ für $\sigma = 0, 1, 2, \ldots \mu$ gleich $\Phi(p^{\pi-\sigma}, p^\mu, p^\sigma) = \Phi(p^\sigma)$, ferner für $\sigma = \mu+1, \ldots \pi-\mu$ gleich $\Phi(p^\mu)$ und für $\sigma = \pi-\mu+1, \ldots \pi$ gleich $\Phi(p^{\pi-\sigma})$. Die Gesamtzahl der Teiler ist also gleich

$$\pi + 1 + (\pi-1)p + (\pi-3)p^2 + \cdots + (\pi - 2\mu + 1)p^\mu.$$

Aus dem Begriffe des Produktes folgt unmittelbar, daß, wenn ein Teiler von $(a;\tau)_t$ einen Faktor hat, dessen Determinante eine Potenz von p^i

ist, dieser Faktor auch in dem Faktor $(p_i^{\pi_i}; p_i^{\mu_i})_{r_i}$ von $(a; \tau)_t$ aufgeht. Daraus ergibt sich:

Die Anzahl aller Teiler von $(a; \tau)_t$ ist gleich

$$T(a; \tau)_t = \prod_{i=1}^{\nu} (\pi_i + 1 + (\pi_i - 1)\, p_i + \cdots + (\pi_i - 2\,\mu_i + 1)\, p_i^{\mu_i}).$$

Dieselbe Anzahl wird auch durch $\sum_{d|a} \Phi\left(\frac{a}{d}, \tau, d\right)$ angegeben, wo d alle Teiler von a durchläuft.

Für $a = 36$, $\tau = 6$ — das einzige derartige System hat die Nummer 76 — ist z. B. $T(36; 6)_{76} = (3 + 2) \cdot (3 + 3) = 30$. Es gibt also 30 Punktgitter, die in jedem Punkt, für den $(x, y) = 6$ ist, einen ihrer Punkte haben.

Aus dem Schluß von § 7 folgt noch leicht, daß die Anzahl der Teiler von $(a; \tau)_t$, die den Koordinatenteiler $z = \prod_{i=1}^{\nu} p_i^{\lambda_i}$ $(0 \leqq \lambda_i \leqq \mu_i)$ haben, gleich

$$\prod_{i=1}^{\nu} \left(2\,\frac{p_i^{\mu_i - \lambda_i} - 1}{p_i - 1} + p^{\mu_i - \lambda_i} \cdot (\pi_i - 2\,\mu_i + 1)\right)$$

ist.

Über die Multiplikation der Systeme werde noch folgendes bemerkt. Da bei dem *Euklid*ischen Algorithmus die Komposition und nicht die Multiplikation benutzt wurde, so kann man daraus nicht schließen, daß das Produkt zweier relativ primer Systeme nur durch die in einem von ihnen aufgehenden Systeme teilbar wäre. So ist z. B. das Produkt zweier nicht assoziierter Primsysteme, deren Determinante p ist, nicht bloß durch diese beiden Systeme, sondern durch alle $p + 1$ Systeme der Determinante p teilbar, weil dieses Produkt den Koordinatenteiler p hat. Für Systeme, deren Determinanten relativ prim sind, gilt der angegebene Satz.

§ 10.

Um die Anzahl der Systeme eines vollständigen Restsystems (mod $(a; \tau)_t$), die zu dem Modul relativ prim sind, zu bestimmen, ist die folgende Betrachtung voranzuschicken.

Zwei Systeme $(a; \tau)_t$ und $(a'; \tau')_{t'}$, deren Determinanten a und a' relativ prim sind, bestimmen je ein Punktgitter, und diese haben das zu dem Produkt $(a; \tau)_t\,(a'; \tau')_t$ gehörige Punktgitter gemeinsam. In einem Parallelogramm $P_{aa'}$, dieses Gitters liegen aa' Gitterpunkte, von denen außer dem

Nullpunkt $a'-1$ zu dem Gitter von $(a;\tau)_t$ und $a-1$ von diesen verschiedene zu dem Gitter von $(a';\tau')_{t'}$ gehören. Die a' zum Gitter von $(a;\tau)_t$ gehörigen Punkte (einschließlich des Nullpunktes) bilden ein System von nicht homologen Punkten in bezug auf $(a';\tau')_{t'}$. Denn wären zwei von ihnen homolog, so wäre der Endpunkt der mit ihrer Verbindungsstrecke gleich langen und parallelen vom Nullpunkt ausgehenden Strecke ein Punkt, der zugleich dem Gitter von $(a;\tau)_t$ und von $(a';\tau')_{t'}$ angehörte, während er doch innerhalb des Parallelogramms $P_{aa'}$, oder eines anliegenden kongruenten Parallelogrammes liegt. Daher bilden die a'^2 Systeme, die durch diese a' Punkte bestimmt sind, und auch die a'^2 Systeme, die aus ihnen hervorgehen, wenn man zu allen dasselbe beliebige System (r_{ik}) addiert, ein vollständiges Restsystem (mod $(a';\tau')_{t'}$). Daraus folgt, daß von den $a^2a'^2$ (mod $(a;\tau)_t(a';\tau')_{t'}$) inkongruenten Systemen genau eins einen beliebig vorgeschriebenen Rest (mod $(a;\tau)_t$) und einen solchen (mod $(a';\tau')_{t'}$) hat, und deshalb ist die Anzahl der (mod $(a;\tau)_t(a';\tau')_{t'}$) inkongruenten Systeme, die zum Modul teilerfremd sind, gleich dem Produkt der entsprechenden Anzahlen für die Moduln $(a;\tau)_t$ und $(a';\tau')_{t'}$. Diese Anzahl braucht daher nur für einen Modul, dessen Determinante eine Primzahlpotenz ist, bestimmt zu werden.

Zwei Systeme sind dann und nur dann relativ prim, wenn sie nicht durch dasselbe Primsystem teilbar sind. Ist nun $(p^\pi;1)_t$ ein primitives System, so ist es nur durch ein Primsystem $(p;1)_r$ teilbar. Man findet also die Anzahl aller (mod $(p^\pi;1)_t$) inkongruenten und zum Modul teilerfremden Systeme, indem man von der Anzahl aller $p^{2\pi}$ inkongruenten Systeme die Anzahl derjenigen abzieht, die durch $(p;1)_r$ teilbar sind. Da $p^{\pi-1}$ Gitterpunkte des Gitters von $(p;1)_r$ in einem zu $(p^\pi;1)_t$ gehörigen Parallelogramm liegen, so ist die Anzahl der durch $(p;1)_r$ teilbaren Systeme gleich $p^{2\pi-2}$ und deshalb die gesuchte Zahl

$$(1.) \qquad \varphi(p^\pi;1)_t = p^{2\pi}\cdot\left(1-\frac{1}{p^2}\right).$$

Hat dagegen das System, dessen Determinante die Primzahlpotenz $q^\varkappa$ ist, den Koordinatenteiler $q^\mu\left(0<\mu\leqq\frac{\varkappa}{2}\right)$, so ist es durch alle Primsysteme $(q;1)_r$ $(r=1,2,\ldots q+1)$ teilbar. Daher ist jetzt $(q+1)q^{2\varkappa-2}$ von $q^{2\varkappa}$ abzuziehen. Dann sind aber die Vielfachen von $\left(\begin{smallmatrix}q&0\\0&q\end{smallmatrix}\right)$, die durch alle $(q;1)_r$ teilbar sind, $(q+1)$-mal in Abrechnung gebracht, während ihre Anzahl nur einmal abgezogen werden darf. Diese Anzahl, die gleich $q^{2\varkappa-4}$ ist, weil $q^{\varkappa-2}$

Gitterpunkte des Gitters von $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ in dem zu $(q^\varkappa; q^\mu)_t$ gehörigen Parallelogramm liegen, muß also q-mal wieder addiert werden; die gesuchte Zahl ist daher jetzt

$$(2.)\quad \varphi(q^\varkappa; q^\mu)_t = q^{2\varkappa} - (q+1)\,q^{2\varkappa-2} + q \cdot q^{2\varkappa-4} = q^{2\varkappa}\Big(1-\frac{1}{q^2}\Big)\Big(1-\frac{1}{q}\Big).$$

Für ein aus verschiedenen Primzahlen zusammengesetztes a ergibt sich die entsprechende Anzahl durch Multiplikation der für die einzelnen Primzahlpotenzen von a geltenden Anzahlen. Somit ist folgender Satz bewiesen:

Hat ein System $(a\,;\tau)_t$ die Determinante und den Koordinatenteiler

$$a = \prod_{i=1}^{\varrho} p_i^{\pi_i} \prod_{j=1}^{\sigma} q_j^{\varkappa_j} \text{ und } \tau = \prod_{j=1}^{\sigma} q_j^{\mu_j},$$

so ist die Anzahl der mod $(a\,;\tau)_t$ inkongruenten und zum Modul teilerfremden Systeme gleich

$$\varphi(a\,;\tau)_t = a^2 \prod_{i=1}^{\varrho}\Big(1-\frac{1}{p_i^2}\Big) \prod_{j=1}^{\sigma}\Big(1-\frac{1}{q_j^2}\Big)\Big(1-\frac{1}{q_j}\Big).$$

Ein dem *Gauß*schen Satz über die *Euler*sche φ-Funktion, wonach die Summe aller φ-Funktionen der Teiler einer Zahl gleich dieser Zahl ist, entsprechender Satz gilt auch für die Funktion $\varphi(a\,;\tau)_t$. Der *Gauß*sche Beweis läßt sich aber ohne eine nicht ganz einfache Erörterung über komplementäre Teiler eines Systems nicht übertragen. Dagegen macht es keine Schwierigkeit, sondern erfordert nur eine etwas langwierige, wenn auch ganz elementare Rechnung, die in *Dirichlet-Dedekind*s Vorlesungen über Zahlentheorie (§ 14) angegebene Beweismethode zu verallgemeinern. Der Beweis braucht nur für ein System $(p^\pi\,; p^\mu)_t$ geführt zu werden.

Da nach § 7 die Anzahl der Teiler mit gegebener Determinante und gegebenem Koordinatenteiler — nur von diesen Zahlen hängt die φ-Funktion des Teilers ab — bekannt ist, so kann man die Summe S der φ-Funktionen aller Teiler berechnen. Man zerlege S in die Summen S' und S'', von denen die erste sich auf alle primitiven Teiler, deren φ-Funktion nach (1.) berechnet wird, die zweite auf alle übrigen Teiler bezieht, wobei die Gleichung (2.) anzuwenden ist. Man findet, da $\varphi(1\,;1)_1 = 1$ ist,

$$S' = 1 + \{p^2(p+1) + p^4(p^2+p) + \cdots + p^{2\mu}(p^\mu + p^{\mu-1}) + (p^{2(\mu+1)} + p^{2(\mu+2)} + \cdots + p^{2(\pi-\mu)})\,p^\mu\}\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big),$$

$$S'' = \sum_{\lambda=1}^{\mu} \{p^{4\lambda} + p^{4\lambda+2}(p+1) + p^{4\lambda+4}(p^2+p) + \cdots + p^{2\mu+2\lambda}(p^{\mu-\lambda} + p^{\mu-\lambda-1})$$
$$+ (p^{2\mu+2\lambda+2} + p^{2\mu+2\lambda+4} + \cdots + p^{2\pi-2\mu+2\lambda})\, p^{\mu-\lambda}\} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

und nach Ausführung der angedeuteten Rechnungen

$$S = S' + S'' = p^{2\pi}.$$

Damit ist der Satz bewiesen, der durch die Gleichung

$$\Sigma\, \varphi(d\,;\tau_d)_{t_d} = a^2$$

ausgedrückt wird, wo die Summe auf alle Systeme, die in $(a\,;\tau)_t$ aufgehen, zu erstrecken ist.

Sur les forces donnant lieu à des trajectoires coniques.

Par M. *Cyparissos Stéphanos*, à Athènes.

Soit, dans un plan XOY, un point (x, y) sollicité par une force accélératrice

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

dont les deux composantes X et Y sont des fonctions des coordonnées de ce point. Je me propose d'examiner dans ce qui suit dans quels cas les trajectoires du mobile sont toutes des coniques, quelles que soient les conditions initiales.

Ce problème a déjà été examiné par *Bertrand*,*) dans le cas où la force (X, Y) aurait en chaque point une direction unique en général. *Bertrand* démontre que, dans ce cas, la force doit passer par un point fixe ou être parallèle à une direction fixe.**)

*) *Bertrand: Note sur un problème de la Mécanique*, Comptes Rendus, 1877, t. 88, p. 731 et s. *Bertrand* avait déjà posé le problème dans une Note antérieure: *Sur la possibilité de déduire d'une seule les lois de Kepler et le principe de l'attraction* (ibid. p. 673).

**) Voici ce que *Bertrand* dit à ce sujet (loc. cit. p. 731): „Si l'on suppose, en un point, la vitesse dirigée dans le sens de la force, le rayon de courbure de la trajectoire en ce point sera infini; or une conique dont en un point le rayon de courbure est infini est nécessairement une ligne droite, et des droites en nombre infini, puisqu'il en passe par chaque point, sont au nombre des trajectoires possibles. Ces droites ne peuvent d'ailleurs se couper qu'en un point, où la direction de la force soit indéterminée, et l'on en conclut qu'elles doivent être parallèles ou passer par un même point. ... Cette condition introduite dans l'énoncé fait disparaître la difficulté et la complication des calculs.“

Il est clair que *Bertrand* n'a pas songé à considérer le cas où la force correspondant à un point donné serait à plusieurs déterminations ayant des directions diffé-

L'examen du cas général, où la force (X, Y) n'est pas nécessairement à direction unique, nous a conduit à ce résultat qu'en dehors des solutions comprises dans le cas considéré par *Bertrand*, notre problème n'admet aucune autre solution. Nous avons en effet démontré que *toute force* (X, Y) *faisant décrire au point mobile une conique quelles que soient les conditions initiales doit passer par un point fixe ou être parallèle à une direction fixe.*

En achevant l'application de notre méthode à la détermination des forces centrales ou à direction fixe faisant mouvoir un point suivant des coniques, nous avons retrouvé les résultats connus, dus à *Darboux* et à *Halphen.**)

I.

1. L'équation différentielle des coniques est, comme on sait,

$$9\frac{d^5y}{dx^5}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-45\frac{d^4y}{dx^4}\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^2y}{dx^2}+40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3=0.$$

Si dans cette équation on introduit, au lieu des dérivées de y par rapport à x, les dérivées $x', y', x'', y'', \ldots$ de x et y par rapport à une variable indépendante quelconque, on obtient le résultat:

$$(1.)\qquad \begin{cases} 9(12)^2(15)+45(12)^2(24)-45(12)(13)(14) \\ \qquad\qquad +40(13)^3-90(12)(13)(23)=0, \end{cases}$$

étant posé

$$(12)=x'y''-y'x'', \qquad (13)=x'y'''-y'x''', \ldots$$

et en général

$$(ij)=x^{(i)}y^{(j)}-y^{(i)}x^{(j)}.$$

---

rentes (chaque détermination variant d'une manière continue avec x et y). Si l'on s'attache cependant à tirer du raisonnement de *Bertrand* une conclusion valable dans le cas d'une force à direction multiple on arrive à ce resultat que: *si toutes les trajectoires du mobile sollicité par une force* (X, Y) *sont des coniques, il faut bien que parmi ces trajectoires soient comprises toutes les droites tangentes à une courbe donnée*, ce qui exige que le force (X, Y) soit constamment tangente à la courbe en question (propriété exprimée par l'équation différentielle $E=0$ du présent travail).

*) C. R., t. 88. On doit aussi à *Halphen* le résultat important suivant: „Si toutes les trajectoires d'un mobile (x, y, z), sollicité par une force (X, Y, Z) dont les composantes sont des fonctions des coordonnées du mobile sont des courbes planes, cette force doit passer par un point fixe ou être parallèle à une direction fixe."

La relation (1.) constitue ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que la trajectoire d'un point mobile, dont les coordonnées (x, y) sont données en fonction d'une variable quelconque, soit une conique.

Pour exprimer maintenant que toutes les trajectoires d'un point mobile (x, y), sollicité par une force (X, Y) dont les composantes X, Y sont des fonctions des coordonnées x, y, sont des coniques, il suffit d'exprimer que la relation déduite de (1.) en y remplaçant

$$x'' \text{ et } y'' \text{ par } X \text{ et } Y,$$

$$x''' \text{ et } y''' \text{ par } \frac{\partial X}{\partial x}x' + \frac{\partial X}{\partial y}y' \text{ et } \frac{\partial Y}{\partial x}x' + \frac{\partial Y}{\partial y}y',$$

$$x'''' \text{ par } \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}x'^2 + 2\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}x'y' + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial X}{\partial x}X + \frac{\partial X}{\partial y}Y,$$

. . . . . .

est satisfaite quelles que soient les valeurs de x, y, x', y'.

La condition en question est ainsi exprimée par l'évanouissement identique de l'expression suivante:

$$45\,(Yx' - Xy')^2 E + 9\,(Yx' - Xy')F + G, \tag{2.}$$

où

$$E = Y_1 X^2 + (Y_2 - X_1)XY - X_2 Y^2,$$
$$F = [12]B + 5[12]B' - 5[13]A - 10[13][23],$$
$$G = 9[12]^2 D - 45[12][13]C + 40[13]^3,$$

étant posé

$$[12] = Yx' - Xy',$$
$$[13] = (Y_1 x' + Y_2 y')x' - (X_1 x' + X_2 y')y',$$
$$[23] = (Y_1 x' + Y_2 y')X - (X_1 x' + X_2 y')Y,$$
$$A = (Y_1 X + Y_2 Y)x' - (X_1 X + X_2 Y)y',$$
$$B = (Y_1 x' - X_1 y')(X_1 x' + X_2 y') + (Y_2 x' - X_2 y')(Y_1 x' + Y_2 y')$$
$$+ 3[(Y_{11}x' + Y_{12}y')x' - (X_{11}x' + X_{12}y')y']X$$
$$+ 3[Y_{12}x' + Y_{22}y')x' - (X_{12}x' + X_{22}y')y']Y,$$
$$B' = (Y_{11}x'^2 + 2\,Y_{12}x'\,y' + Y_{22}y'^2)X - (X_{11}x'^2 + 2\,X_{12}x'y' + X_{22}y'^2)Y,$$
$$C = (Y_{11}x'^2 + 2\,Y_{12}x'y' + Y_{22}y'^2)x' - (X_{11}x'^2 + 2\,X_{12}x'\,y' + X_{22}y'^2)y',$$
$$D = (Y_{111}x'^3 + 3\,Y_{112}x'^2\,y' + 3\,Y_{122}x'\,y'^2 + Y_{222}y'^3)x'$$
$$- (X_{111}x'^3 + 3\,X_{112}x'^2\,y' + 3\,X_{122}x'\,y' + X_{222}y'^3)y',$$

les indices 1 et 2, ajoutés aux symboles X et Y, désignant des dérivées partielles par rapport aux variables x et y (comme, par exemple, $X_{112} = \frac{\partial^3 X}{\partial^2 x\, \partial y}$)*).

Les expressions E, F et G, qui figurent dans la formule (2.), étant des polynômes homogènes par rapport à x', y', de degrés respectifs 0, 3 et 6, on voit que l'évanouissement identique de l'expression (2.) est équivalente au système des trois conditions suivantes:

$$E = 0, \quad F = 0, \quad G = 0,$$

dont les deux dernières doivent avoir lieu quelles que soient les valeurs de x' et y'.

II.

Signification de la condition $E = 0$.

2. L'équation différentielle

$$E = Y_1 X^2 + (Y_2 - X_1) X Y - X_2 Y^2 = 0,$$

pouvant être écrite comme il suit:

$$\left(\frac{Y}{X}\right)_1 \left(\frac{x Y - y X}{X}\right)_2 - \left(\frac{Y}{X}\right)_2 \left(\frac{x Y - y X}{X}\right)_1 = 0,$$

exprime que les deux fonctions

$$\frac{Y}{X} \quad \text{et} \quad \frac{x Y - y X}{X}$$

doivent être liées entre elles par une relation, c'est-à-dire que les fonctions $-Y, X$ et $x Y - y X$ doivent être liées par une relation homogène

$$f(-Y, X, x Y - y X) = 0.$$

L'équation $E = 0$ *signifie ainsi que la droite passant par le point* (x, y) *et ayant la direction de la force* (X, Y) *correspondante reste toujours tangente à une courbe fixe, celle ayant pour équation tangentielle:*

$$f(u, v, w) = 0.$$

---

*) Dans ce qui suit nous continuerons à employer les indices 1 et 2 avec la même signification. Par exemple $(M - 2N)_1$ dénotera la dérivée $\frac{\partial}{\partial x}(M - 2N)$.

Il est aisé de voir que la même équation $E=0$ exprime la condition pour que l'équation différentielle $Yx' - Xy' = 0$ représente un système de droites.

III.

Formules ayant lieu dans le cas où $E=0$.

3. Si dans les expressions de F et G on remplace x' par X et y' par Y on obtient:

$$F(X, Y) = -15E^2,$$
$$G(X, Y) = \quad 40E^3.$$

On voit par là que chacune des identités

$$F=0, \quad G=0$$

implique la relation $E=0$.

En profitant de la relation $E=0$ on peut mettre les expressions F et G sous des formes facilitant considérablement l'étude de notre problème.

Aussi allons-nous donner quelques formules, valables dans le cas où $E=0$, qui nous seront fort utiles par la suite.

4. Dans le cas où $E=0$ les expressions [13], [23] et A du n° 2 sont évidemment divisibles par

$$[12] = Yx' - Xy'.$$

En supposant donc que $E=0$, on peut poser:

$$[13] = [12]\,[Kx' + Ly'],$$
$$[23] = [12]\,M,$$
$$A = [12]\,N,$$

où K, L, M, N désignent des fonctions de x et y.

On aura ainsi:

$$(3.) \qquad \begin{cases} X_1 = KX - M, \\ X_2 = LX, \\ Y_1 = KY, \\ Y_2 = LY - M \end{cases}$$

et

$$M+N=KX+LY. \tag{4.}$$

On remarquera que les formules (3.) se permutent entre elles lorsqu'on échange entre eux X et Y, K et L, ainsi que les indices 1 et 2. De cette manière les formules relatives à Y_1 et Y_2 peuvent être déduites de celles relatives à X_1 et X_2.

5. En partant des formules (3.) et (4.) on trouve:

$$\text{(5.)}\quad \begin{cases} X_{11}=K_1X+(K_2-L_1)Y+K^2X-2KM, \\ X_{12}=L_1X+L(KX-M), \\ X_{22}=(L_2+L^2)X, \\ Y_{11}=(K_1+K^2)Y, \\ Y_{12}=K_2Y+K(LY-M), \\ Y_{22}=L_2Y-(K_2-L_1)X+L^2Y-2LM \end{cases}$$

et aussi:

$$\text{(6.)}\quad \begin{cases} M_1=-(K_2-L_1)Y+KM, \\ M_2=\ \ (K_2-L_1)X+LM, \end{cases}$$

$$\text{(7.)}\quad \begin{cases} N_1=\ \ K_1X+K_2Y+K(N-M), \\ N_2=\ \ L_1X+L_2Y+L(N-M). \end{cases}$$

De plus les égalités

$$(M_1)_2=(M_2)_1, \quad (N_1)_2=(N_2)_1$$

conduisent à la relation:

$$(K_{12}-L_{11})X+(K_{22}-L_{12})Y=3(K_2-L_1)M. \tag{8.}$$

On a enfin les relations:

$$\text{(9.)}\quad \begin{cases} X_{111}=K_{11}X+(K_{12}-L_{11})Y+3K_1KY+3(K_2-L_1)Y-3K_1M \\ \qquad\qquad +K^3X-3K^2M, \\ X_{112}=L_{11}X+K_1LX+K_2LY+2L_1KX-L_1LY-2L_1M \\ \qquad\qquad +K^2LX-2KLM, \\ X_{122}=L_{12}X+2L_1LX+L_2KX-L_2M+KL^2X-L^2M, \\ X_{222}=(L_{22}+3L_2L+L^3)X \end{cases}$$

et quatre autres qui s'en déduisent par l'échange des symboles X et Y, K et L et des indices 1 et 2.

6. En utilisant les formules précédentes on reconnaît que les expressions B, B', C et D sont toutes divisibles par [12] dans le cas où $E=0$. Cette propriété trouvera son application dans ce qui suit (n°s 7 et 13).

IV.

Intégration du système $F=0$.

7. Le système de relations $F=0$ implique, comme nous savons (n° 3), la condition $E=0$. On peut donc utiliser les formules du § III pour simplifier l'expression de F, sous la supposition que $E=0$.

On obtient ainsi

$$F=[12]^2 F',$$

étant posé

$$F'=3(K_1 X+K_2 Y)x'+3(L_1 X+L_2 Y)y'$$
$$-5(K_2-L_1)(Yx'-Xy')-(M+N)(Kx'+Ly').$$

On voit par là que l'évanouissement identique de l'expression F équivaut, dans le cas où l'on suppose déjà $E=0$, à l'évanouissement identique de l'expression F', c'est-à-dire au système des deux équations différentielles:

$$3(K_1 X+K_2 Y)-5(K_2-L_1)Y=(M+N)K,$$
$$3(L_1 X+L_2 Y)+5(K_2-L_1)X=(M+N)L,$$

équations qu'on peut aussi écrire comme il suit:

$$(10.)\qquad \begin{cases} 3(N-2M)_1-11(K_2-L_1)Y=4(N-2M)K, \\ 3(N-2M)_2+11(K_2-L_1)X=4(N-2M)L, \end{cases}$$

en vertu des formules (6.) et (7.) du n° 5.

8. En différentiant la première des équations différentielles (10.) par rapport à y et la seconde par rapport à x et retranchant les résultats, on arrive, par suite de la relation (8.), à l'équation remarquable suivante:

$$(K_2-L_1)(N-2M)=0.$$

Cette équation fait voir que le système $F=0$ exige que l'on ait soit $K_2-L_1=0$ soit $N-2M=0$. Pourtant les équations (10.) laissent voir immédiatement que, dans le cas où $N-2M=0$, on doit avoir aussi $K_2-L_1=0$. On arrive ainsi au résultat suivant:

Le système $F=0$ *exige que l'on ait, à côté de la condition* $E=0$, *cette autre:*

(11.) $$K_2-L_1=0.$$

9. La condition $K_2-L_1=0$ exprime que les deux fonctions K et L constituent les dérivées partielles par rapport à x et à y d'une même fonction. On peut donc poser:

$$K=\frac{T_1}{T}, \quad L=\frac{T_2}{T}.$$

Les relations

$$X_2=LX, \quad Y_1=KY,$$

(du n° 4), donnent alors

$$\frac{X_2}{X}=\frac{T_2}{T}, \qquad \frac{Y_1}{Y}=\frac{T_1}{T},$$

d'où l'on déduit que les fonctions X et Y sont de la forme:

$$X=Tg, \qquad Y=Th,$$

g désignant une fonction de x et h une fonction de y.

Si l'on exprime maintenant que les fonctions $X=Tg$ et $Y=Th$ satisfont à l'équation différentielle

$$E=Y_1X^2+(Y_2-X_1)XY-X_2Y^2=0,$$

on trouve qu'on doit avoir:

$$T^3(h_2-g_1)gh=0,$$

c'est-à-dire

$$g_1=h_2=\lambda,$$

λ désignant une constante.*)

Dans le cas où $\lambda\neq 0$ on peut poser

$$g=\lambda(x-x_1), \qquad h=\lambda(y-y_1),$$

---

*) La supposition $gh=0$ conduit à une partie des solutions correspondant au cas où $g_1=h_2=0$.

tandis que si $\lambda = 0$ on aura

$$g = a, \qquad h = b$$

(x_1, y_1, a, b désignant des constantes).

On obtient ainsi le résultat suivant:

Les conditions $E = 0$ et $K_2 - L_1 = 0$, *impliquées par les conditions* $F = 0$, *expriment que les fonctions* X *et* Y *doivent être soit de la forme*

$$X = \lambda(x - x_1)T, \qquad Y = \lambda(y - y_1)T, \qquad (\text{où } \lambda \neq 0)$$

soit de la forme

$$X = aT, \qquad Y = bT,$$

c'est-à-dire que la force (X, Y), *supposée non constamment nulle doit être soit centrale soit parallèle à une direction fixe.*

En d'autres termes *la relation homogène*

$$f(-Y, X, xY - yX) = 0,$$

dont il a été question au n° 2, *doit être linéaire en vertu de la relation* $K_2 - L_1 = 0$.

10. Si dans les relations

$$X_1 = KX - M,$$
$$Y_2 = LY - M,$$
$$M + N = KX + LY,$$

du n° 4, on pose

$$K = \frac{T_1}{T}, \quad L = \frac{T_2}{T},$$
$$X = Tg, \quad Y = Th, \qquad (\text{où } g_1 = h_2 = \lambda)$$

on obtient:

$$(12.) \qquad \begin{cases} M = -T\lambda, \\ N = T_1 g + T_2 h + T\lambda. \end{cases}$$

Les équations (10.) du n° 8 deviennent ainsi:

$$\frac{(T_1 g + T_2 h + 3T\lambda)_1}{T_1 g + T_2 h + 3T\lambda} = \frac{4}{3}\frac{T_1}{T}$$

et

$$\frac{(T_1 g + T_2 h + 3T\lambda)_2}{T_1 g + T_2 h + 3T\lambda} = \frac{4}{3}\frac{T_2}{T},$$

d'où, par intégration, on trouve:

$$T_1 g + T_2 h + 3 T\lambda = 3\mu T^{\frac{4}{3}}, \tag{13.}$$

μ désignant une constante.

Il est à remarquer que le cas particulier, dont il a été question au n° 8, où $K_2 - L_1 = 0$ et $N - 2M = 0$, c'est-à-dire

$$T_1 g + T_2 h + 3 T\lambda = 0,$$

correspond simplement au cas où $\mu = 0$.

11. En posant dans la relation (13.)

$$T = \sigma^{-3},$$

on obtient:

$$\sigma_1 g + \sigma_2 h + \mu = \lambda\sigma. \tag{14.}$$

Dans l'intégration de cette équation différentielle il y a à distinguer les deux cas suivants:

I. Lorsque $\lambda \neq 0$ et

$$g = \lambda(x - x_1), \qquad h = \lambda(y - y_1).$$

Dans ce cas l'équation (14.) exprime que σ doit être de la forme

$$\Phi(x - x_1,\ y - y_1) + \frac{\mu}{\lambda},$$

Φ désignant une fonction homogène du premier degré des deux différences $x - x_1$, $y - y_1$, c'est-à-dire de la forme $(x - x_1)\,\varphi\left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right)$.

II. Lorsque $\lambda = 0$, $g = a$, $h = b$. Dans ce cas l'équation (14.) devient:

$$a\sigma_1 + b\sigma_2 + \mu = 0$$

et exprime que σ doit être de la forme:

$$\varphi(ay - bx) - \frac{\mu x}{a},$$

$\varphi(ay - bx)$ désignant une fonction arbitraire de $ay - bx$.

12. On voit ainsi que l'intégration du système $F = 0$ conduit aux résultats suivants:

Les fonctions X, Y satisfaisant au système $F = 0$ sont de la forme

$$X = Tg, \qquad Y = Th,$$

où

$$g_2 = h_1 = 0, \qquad g_1 = h_2 = \lambda.$$

Si $\lambda \neq 0$, $g = \lambda(x - x_1)$, $h = \lambda(y - y_1)$, *la fonction* T *est de la forme:*

$$\left[\Phi(x - x_1, y - y_1) + \frac{\mu}{\lambda}\right]^{-3},$$

Φ *désignant une fonction homogène du premier degré des différences* $x - x_1$, $y - y_1$ *et* μ *une constante.*

Si, au contraire, $\lambda = 0$, $g = a$, $h = b$, *la fonction* T *est de la forme*

$$\left[\varphi(ay - bx) - \frac{\mu x}{a}\right]^{-3},$$

$\varphi(ay - bx)$ *désignant une fonction arbitraire de* $ay - bx$ *et* μ *une constante.*

V.

Intégration du système $G = 0$.

13. Nous savons que le système d'équations différentielles G exige que l'on ait $E = 0$. Or, en supposant que $E = 0$ et en utilisant les formules du § III, on reconnaît que l'expression G peut être écrite de la manière suivante:

$$G = [12]^3 G',$$

étant posé:

$$G' = \{[111]x'^3 + 3[112]x'^2 y' + 3[122]x' y'^2 + [222]y'^3\},$$

où

$$[111] = 9K_{11} - 18K_1 K + 4K^3,$$
$$[112] = 6K_{12} + 3L_{11} - 6K_2 K - 6L_1 K - 6K_1 L + 4K^2 L,$$
$$[122] = 3K_{22} + 6L_{12} - 6K_2 L - 6L_1 L - 6L_2 K + 4KL^2,$$
$$[222] = 9L_{22} - 18L_2 L + 4L^3.$$

On voit ainsi que l'évanouissement identique de l'expression G conduit d'une part à la condition $E = 0$ et d'autre part à l'évanouissement identique de l'expression G', c'est-à-dire aux équations:

(15.) $$[111] = 0, \ [112] = 0, \ [122] = 0, \ [222] = 0.$$

14. En égalant maintenant à zéro les trois expressions

$$[111]_2-[112]_1,\ [112]_2-[122]_1,\ [122]_2-[222]_1$$

on obtient les relations:

$$(16.)\quad \begin{cases} 3\Omega_{11}-8\Omega_1 K-12K_1\Omega+8K^2\Omega=0, \\ 3\Omega_{12}-4\Omega_1 L-4\Omega_2 K-6K_2\Omega-6L_1\Omega+8KL\Omega=0, \\ 3\Omega_{22}-8\Omega_2 L-12L_2\Omega+8L^2\Omega=0 \end{cases}$$

étant posé

$$\Omega=K_2-L_1.$$

D'autre part, par suite de la relation (8.) du n° 5, on a:

$$\Omega_1 X+\Omega_2 Y=3\Omega M.$$

D'où l'on déduit, par différentiation et en utilisant les formules (3.) et (6.) du § III, les relations:

$$(17.)\quad \begin{cases} \Omega_{11}X+\Omega_{12}Y=4\Omega_1 M-3\Omega^2 Y, \\ \Omega_{12}X+\Omega_{22}Y=4\Omega_2 M+3\Omega^2 X. \end{cases}$$

L'élimination de $\Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{22}$ entre les relations (16.) et (17.) conduit maintenant aux résultats suivants:

$$4\Omega_1(KX+LY-3M)=(-6K_2Y-6L_1Y-12K_1X \\ +8K^2X+8KLY-9\Omega Y-12KM)\Omega,$$

$$4\Omega_2(KX+LY-3M)=(-6L_1X-6K_2X-12L_2Y \\ +8L^2Y+8KLX+9\Omega X-12LM)\Omega,$$

qu'on peut aussi écrire comme il suit:

$$(18.)\quad \begin{cases} \Omega_1(N-2M)=[-3(N-2M)_1+\frac{21}{4}\Omega Y+5K(N-2M)]\Omega, \\ \Omega_2(N-2M)=[-3(N-2M)_2-\frac{21}{4}\Omega X+5L(N-2M)]\Omega. \end{cases}$$

L'élimination de Ω_1, Ω_2 entre ces relations et la relation

$$\Omega_1 X+\Omega_2 Y=3\Omega M$$

donne:

$$(19.)\qquad [3X(N-2M)_1+3Y(N-2M)_2-(N-2M)(2M+5N)]\Omega=0.$$

D'autre part, en écrivant les relations (18.) de la manière suivante:

$$[1]=\frac{\Omega_1}{\Omega}+3\frac{(N-2M)_1}{N-2M}-\frac{21}{4}\frac{\Omega Y}{N-2M}-5K=0,$$

$$[2]=\frac{\Omega_2}{\Omega}+3\frac{(N-2M)_2}{N-2M}+\frac{21}{4}\frac{\Omega X}{N-2M}-5L=0,$$

et en égalant à zéro l'expression $[1]_2-[2]_1$, on obtient la relation:

$$\frac{21}{4}\left(\frac{\Omega X}{N-2M}\right)_1+\frac{21}{4}\left(\frac{\Omega Y}{N-2M}\right)_2+5\Omega=0,$$

soit

$$(20.)\quad [21X(N-2M)_1+21Y(N-2M)_2-(N-2M)(2M+41N)]\Omega=0.$$

La comparaison des relations (19.) et (20.) donne enfin

$$(N-2M)[7(2M+5N)-(2M+41N)]\Omega=0,$$

soit

$$(21.)\qquad (N-2M)^2\Omega=0.$$

La relation (21.), à laquelle nous sommes ainsi parvenus, montre que le système d'équations $G=0$ suppose que l'on ait soit $\Omega=K_2-L_1=0$, soit $N-2M=0$. Pourtant les équations (18.) laissent voir que si $N-2M=0$, on doit avoir aussi $\Omega=K_2-L_1=0$.

On reconnaît ainsi que *toute solution du système d'équations* $G=0$ *est telle que l'on ait, non seulement* $E=0$, *mais aussi*

$$\Omega=K_2-L_1=0.$$

Du reste les équations précédentes de (16.) à (21.), sont toutes satisfaites identiquement si l'on suppose $\Omega=0$.

La propriété $K_2-L_1=0$ montre, de même que dans le cas du système F (n° 9), que l'on doit avoir

$$K=\frac{T_1}{T},\quad L=\frac{T_2}{T},$$

$$X=Tg,\quad Y=Th,$$

où

$$g_2=h_1=0,\qquad g_1=h_2=\lambda,$$

c'est-à-dire que la force (X, Y) doit passer par un point fixe ou être parallèle à une direction fixe.

15. En supposant $K_2 = L_1$ dans les expressions [111], [112], [122], [222] du n° 13 on obtient:

$$[111] = 9K_{11} - 18K_1K + 4K^3,$$
$$[112] = 9L_{11} - 12L_1K - 6K_1L + 4K^2L,$$
$$[122] = 9K_{22} - 12K_2L - 6L_2K + 4KL^2,$$
$$[222] = 9L_{22} - 18L_2L + 4L^3.$$

Si l'on fait maintenant, dans ces expressions,

$$K = \frac{T_1}{T}, \quad L = \frac{T_2}{T},$$

on obtient les résultats suivants:

$$[111] = -\frac{27}{2}\tau^{-1}\tau_{111},$$
$$[112] = -\frac{27}{2}\tau^{-1}\tau_{112},$$
$$[122] = -\frac{27}{2}\tau^{-1}\tau_{122},$$
$$[222] = -\frac{27}{2}\tau^{-1}\tau_{222},$$

étant posé

$$\tau = T^{-\frac{2}{3}}.$$

Les équations

$$\tau_{111} = 0, \ \tau_{112} = 0, \ \tau_{122} = 0, \ \tau_{222} = 0,$$

qu'on déduit ainsi des équations (15.), montrent que $\tau = T^{-\frac{2}{3}}$ doit être égal à un polynôme du second degré en x et y:

$$\tau = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

16. En réunissant les résultats précédents, relatifs au système $G = 0$, on voit que *le système d'équations* $G = 0$ *exige* 1°) *que l'on ait* $E = 0$ *et* $\Omega = K_2 - L_1 = 0$, *c'est-à-dire*

$$X = Tg, \qquad Y = Th,$$

où

$$g_2 = h_1 = 0, \qquad g_1 = h_2 = \lambda.$$

2°) *que la fonction* T *soit de la forme* $T = \tau^{-\frac{3}{2}}$, τ *désignant un polynôme du second degré en* x *et* y.

VI.

Solutions communes aux systèmes $F=0$, $G=0$.

17. Examinons maintenant quelles doivent être les solutions communes aux deux systèmes $F=0$, $G=0$, qui sont toutes du reste telles que $E=0$.

D'après ce qui précède, la force (X, Y) doit être tout d'abord telle que

$$X = Tg, \qquad Y = Th,$$

où

$$g_2 = h_1 = 0, \qquad g_1 = h_2 = \lambda,$$

c'est-à-dire qu'elle doit être centrale ou parallèle à une direction fixe.

Dans le cas où $\lambda \neq 0$, $g = \lambda(x - x_1)$, $h = \lambda(y - y_1)$, T doit être à la fois de la forme $\tau^{-\frac{3}{2}}$, τ désignant un polynôme entier du second degré en x et y, et de la forme

$$\left[\Phi(x - x_1,\ y - y_1) + \frac{\mu}{\lambda}\right]^{-3},$$

Φ désignant une fonction homogène du premier degré des différences $x - x_1$, $y - y_1$ et μ une constante. Cela ne peut se faire que de deux manières: 1° si $\Phi(x - x_1, y - y_1)$ est égal à la racine carrée d'un polynôme homogène et de second degré par rapport aux différences $x - x_1$ et $y - y_1$, tandis que $\mu = 0$, 2° si $\Phi(x - x_1, y - y_1)$ est égal à une expression linéaire et homogène par rapport aux différences $x - x_1$, $y - y_1$, μ pouvant avoir une valeur quelconque.

D'autre part, dans le cas où $\lambda = 0$, $g = a$, $h = b$, on a également deux solutions, pouvant être considérées comme des limites des solutions précédentes correspondant au cas où le point x_1, y_1 s'éloigne à l'infini sur la droite $ay - bx = 0$. Dans ce cas T doit être à la fois de la forme $\tau^{-\frac{3}{2}}$, τ désignant un polynôme du second degré en x et y, et de la forme $\left[\varphi(ay - bx) - \frac{\mu x}{a}\right]^{-3}$.

On a alors les deux solutions suivantes: 1° φ est égal à la racine carrée d'une expression de la forme:

$$\alpha(ay-bx)^2+\beta(ay-bx)+\gamma,$$

tandis que $\mu=0$, 2° φ est de la forme:

$$\alpha(ay-bx)+\beta,$$

μ pouvant avoir une valeur quelconque.

On retrouve ainsi les résultats, dus à *Darboux* et à *Halphen* relatifs aux forces centrales ou parallèles à une direction fixe donnant lieu à des trajectoires coniques.

Bemerkungen zur Theorie der algebraischen Kurven.

Von Herrn *Georg Landsberg* in Breslau.

Die nachfolgenden Ausführungen geben einige Ergänzungen zu dem kurventheoretischen Teile der von Herrn *K. Hensel* und mir gemeinsam herausgegebenen „Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln“ (im folgenden kurz mit A. F. zitiert). Die erste Note stellt die beiden verschiedenen Darstellungen einander gegenüber, deren das System der Wendepunkte einer ebenen algebraischen Kurve fähig ist, und bestimmt die diesen Darstellungen zugehörigen Divisoren, wobei sich die *Hesse*sche Determinante als weniger einfach erweist, als die aus den Differentialen gebildete Determinante. Die zweite gibt in ausführlicher Weise die (a. a. O. 27. Vorl. § 4 nur skizzierten) Entwicklungen, welche notwendig werden, wenn man die Systeme der wirklichen und der scheinbaren Doppelpunkte einer algebraischen Raumkurve darstellen und von einander trennen will. Für diesen Teil der Untersuchung kann noch auf die Note des Herrn *A. Brill* „Über die Darstellung algebraischer Raumkurven durch eine Gleichung“ (Gött. Nachr. 1901, S. 156) hingewiesen werden, welche mit der hier vorliegenden mancherlei Berührungspunkte darbietet.

I. *Die Hessesche Determinante.*

Die Wendepunkte einer ebenen algebraischen Kurve n-ter Ordnung

$$F(x_0, x_1, x_2) = 0 \tag{1.}$$

können aus zwei verschiedenen Gleichungen erhalten werden, entweder indem man die Nullstellen der Determinante

$$(2.) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ dx_0 & dx_1 & dx_2 \\ d^2x_0 & d^2x_1 & d^2x_2 \end{vmatrix}$$

oder indem man die der *Hesse*schen Determinante bestimmt:

$$(3.) \qquad H = \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \right| = |F_{ik}|. \qquad (i,k = 0,1,2)$$

Beide Determinanten erhalten, wenn die Untersuchung in uneingeschränkter Allgemeinheit geführt wird, überflüssige Nullpunkte, aber die erste nur dann, wenn die Kurve Rückkehrpunkte oder allgemeiner einzweigige Singularitäten besitzt, während in der zweiten jede beliebige Singularität überzählige Faktoren hervorbringt, die abgesondert werden müssen. Die erste ist also für die Bestimmung der Wendepunkte geeigneter als die zweite; dies soll durch Vergleichung der den beiden Determinanten zugehörigen Divisoren erwiesen werden.

Man kann x_0, x_1, x_2 als Funktionen n-ter Ordnung des zu einer *Riemann*schen Fläche gehörigen Körpers auffassen und somit in der Form darstellen (A. F. 25. Vorl.):

$$(4.) \qquad x_0 = \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}}, \quad x_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \quad x_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}},$$

wobei $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ drei ganze linear unabhängige und teilerfremde Divisoren derselben Klasse von der Ordnung n und $\mathfrak{A}$ eine lineare Verbindung von ihnen bedeutet. Dann ist (A. F. S. 442 und 444):

$$(5.) \qquad \Delta = \frac{\mathfrak{R}_1^2 \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{A}^3},$$

worin $\mathfrak{R}_2$ den Divisor der Wendepunkte bedeutet, während $\mathfrak{R}_1$ der Divisor der Rückkehrpunkte ist, der algebraisch als größter gemeinschaftlicher Teiler der Differentialteiler von

$$x_1 dx_2 - x_2 dx_1, \quad x_2 dx_0 - x_0 dx_2, \quad x_0 dx_1 - x_1 dx_0$$

erklärt ist. Diese Differentiale sind bekanntlich den Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ proportional, und wenn man

$$(6.)\qquad dM=\frac{x_1dx_2-x_2dx_1}{\frac{\partial F}{\partial x_0}}=\frac{x_2dx_0-x_0dx_2}{\frac{\partial F}{\partial x_1}}=\frac{x_0dx_1-x_1dx_0}{\frac{\partial F}{\partial x_2}}$$

setzt, so gehört zu dM der Differentialteiler (A. F. S. 428):

$$(7.)\qquad dM=\frac{\mathfrak{A}^{n-3}}{\mathfrak{D}},$$

wo $\mathfrak{D}$ den Divisor der Doppelpunkte bedeutet, der *alle* Kurvensingularitäten mit den durch die Art der Singularität bedingten Multiplizitäten enthält.

Um nun auch den zu H gehörigen Divisor zu ermitteln, differentiiere man die Gleichungen (6.), wodurch man erhält

$$\left(F_i=\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\qquad\begin{aligned}x_1d^2x_2-x_2d^2x_1&=dM\cdot dF_0+d^2M\cdot F_0,\\ x_2d^2x_0-x_0d^2x_2&=dM\cdot dF_1+d^2M\cdot F_1,\\ x_0d^2x_1-x_1d^2x_0&=dM\cdot dF_2+d^2M\cdot F_2,\end{aligned}$$

und folglich ist

$$\begin{vmatrix}x_2dx_0-x_0dx_2, & x_2d^2x_0-x_0d^2x_2\\ x_0dx_1-x_1dx_0, & x_0d^2x_1-x_1d^2x_0\end{vmatrix}=dM^2\begin{vmatrix}F_1 & dF_1\\ F_2 & dF_2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{dM^2}{n-1}\begin{vmatrix}F_{10} & F_{11} & F_{12}\\ F_{20} & F_{21} & F_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_0 & x_1 & x_2\\ dx_0 & dx_1 & dx_2\end{vmatrix}.$$

Durch leichte Umformung und nochmalige Anwendung der Gleichungen (6.) findet man schließlich

$$(8.)\qquad (n-1)^2\Delta=H\cdot dM^3.$$

Geht man also auf die Divisorengleichungen (5.) und (7.) zurück, so ergibt sich

$$(9.)\qquad H=\frac{\mathfrak{D}^3\mathfrak{R}_1^2\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{A}^{3(n-2)}}.$$

Die Hessesche Determinante verschwindet also außer für die Wendepunkte (Divisor $\mathfrak{R}_2$) nicht bloß, ebenso wie Δ, in den Rückkehrpunkten (Divisor $\mathfrak{R}_1$), sondern darüber hinaus noch für jeden singulären Punkt der Kurve, und zwar ist der überflüssige Faktor die dritte Potenz des Divisors $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte, der algebraisch durch die Gleichungen (6.) *und* (7.) *definiert wird.*

Natürlich ergibt die Gleichung (8.), ebenso wie (5.) die bekannte *Plücker*sche Formel für die Anzahl der Wendepunkte der Kurve.

II.

Die Divisoren der scheinbaren und der wirklichen Doppelpunkte einer Raumkurve.

§ 1.

Eine Raumkurve C_n^p von der Ordnung n und dem Geschlechte p sei durch die Gleichungen gegeben:

$$(1.) \qquad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \mathfrak{A}_0 : \mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A}_2 : \mathfrak{A}_3,$$

wobei die $\mathfrak{A}_i$ teilerfremde ganze Divisoren n-ter Ordnung bedeuten, die zu einer gegebenen *Riemann*schen Fläche vom Geschlechte p gehören und äquivalent sind, so daß $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{A}_k} = \frac{x_i}{x_k}$ eine Funktion des Körpers ist. Um nun die Gleichungsform des von einem beliebigen Raumpunkte $P = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ ausgehenden Projektionskegels zu bestimmen, setzen wir

$$(2.) \qquad \begin{cases} \xi_{01} = x_0 u_1 - x_1 u_0, & \xi_{23} = x_2 u_3 - x_3 u_2, \\ \xi_{02} = x_0 u_2 - x_2 u_0, & \xi_{31} = x_3 u_1 - x_1 u_3, \\ \xi_{03} = x_0 u_3 - x_3 u_0, & \xi_{12} = x_1 u_2 - x_2 u_1. \end{cases}$$

Die Linearformen $\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}$ sind dann und nur dann unabhängig, falls $u_0 \neq 0$, d. h. falls P nicht in der ersten Seitenebene E_0 des Koordinaten-Tetraeders gelegen ist. Unter dieser Voraussetzung kann also die Gleichung des Projektionskegels n-ter Ordnung in die Form gebracht werden:

$$(3.) \qquad \Phi_0(\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}) \equiv \Sigma U_{\alpha\beta\gamma} \xi_{01}^{\alpha} \xi_{02}^{\beta} \xi_{03}^{\gamma} = 0, \qquad (\alpha+\beta+\gamma=n)$$

worin die Koeffizienten U ganze Formen von u_0, u_1, u_2, u_3 bedeuten. Um den Grad dieser Formen zu bestimmen, berücksichtigen wir, daß die Gleichung

$$\Phi_0(x_1, x_2, x_3) = \Sigma U_{\alpha\beta\gamma} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} = 0$$

die Schnittkurve des Projektionskegels und der Ebene E_0 darstellt, und daß, wenn umgekehrt ein Punkt (x_1, x_2, x_3) dieser Ebene gegeben ist, das Projektionszentrum P ebenfalls auf einem Kegel n-ter Ordnung gelegen ist, der die C_n^p enthält. Hieraus folgt erstens, daß die Formen $U_{\alpha\beta\gamma}$ den Grad n haben, und zweitens, daß sie *sämtlich* verschwinden müssen, wenn die

Variabeln u_i durch die Divisoren $\mathfrak{A}_i$ ersetzt werden. Wir schreiben daher jetzt genauer:

$$(4^a.) \qquad \Phi_0 \equiv \Phi_0\Big(\overbrace{u_1, u_2, u_3, u_4}^{n} \Big| \overbrace{\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}}^{n}\Big)$$

und erhalten im ganzen vier verschiedene solche Gleichungsformeln des von P ausgehenden Projektionskegels, nämlich

$$(4.) \qquad \begin{cases} \Phi_0(u|\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}) = 0, \\ \Phi_1(u|\xi_{10}, \xi_{12}, \xi_{13}) = 0, \\ \Phi_2(u|\xi_{20}, \xi_{21}, \xi_{23}) = 0, \\ \Phi_3(u|\xi_{30}, \xi_{31}, \xi_{32}) = 0, \end{cases}$$

je nachdem der Index 0 oder 1, 2, 3 bei der Aufstellung der Gleichung bevorzugt wird. Jede der Formen $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ ist zufolge ihrer Definition eine irreduktible Funktion der sieben in ihr auftretenden Variabeln; ersetzt man aber in ihnen ξ_{ik} durch $x_i u_k - x_k u_i$, so zerfallen die Formen Φ_i in Faktoren, aber nur so, daß sich aus jeder von ihnen ein allein von den Variabeln u abhängiger Teiler herausheben läßt, nach dessen Ablösung ein allen vier Formen gemeinsamer und allein wesentlicher Faktor zurückbleibt.

Um diese Tatsache zu beweisen, berücksichtigen wir zunächst, daß auch nach Ausführung der durch die Gleichungen (2.) gegebenen Substitution die Formen Φ_i *in bezug auf die Variabeln* x irreduktibel bleiben müssen; denn würde z. B. Φ_0 durch jene Substitution in zwei Faktoren S und T zerfallen, *die beide von* x *abhängig sind*, d. h. wäre

$$\Phi_0(u_0, u_1, u_2, u_3|\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}) = S(u_0, u_1, u_2, u_3|x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot T(u_0, u_1, u_2, u_3|x_0, x_1, x_2, x_3),$$

so würde eine solche Zerlegung auch dann noch existieren, wenn $u_0 = 1$, $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ gesetzt wird, und das ist unmöglich, weil die linke Seite obiger Gleichung übergeht in

$$\pm \Phi_0(1, 0, 0, 0|x_1, x_2, x_3)$$

und, gleich Null gesetzt, den vom ersten Eckpunkt A_0 des Koordinatentetraeders an die Kurve gehenden irreduktiblen Projektionskegel darstellt. Aus diesem Grunde erhalten durch die Substitution die Formen $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ einen größten gemeinsamen Teiler $H(u|x)$, der in bezug auf x vom n-ten

Grade ist, und der, gleich Null gesetzt, die Bedingung dafür darstellt, daß die Verbindungslinie der Punkte u und x die C_n^p schneidet. Die Gleichung $H(u|x)=0$ stellt somit den Komplex der Sekanten der Raumkurve dar; ihre linke Seite kann daher bei Vertauschung der Punkte n und x höchstens das Zeichen wechseln und muß also auch in bezug auf die Variabeln u den Grad n haben. Wir erhalten demgemäß die Zerlegungen

$$\Phi_i(u|\xi_{i\alpha}, \xi_{i\beta}, \xi_{i\gamma}) = G_i(u) \cdot H\left(\begin{matrix}n\\u\end{matrix}\middle|\begin{matrix}n\\x\end{matrix}\right), \qquad (i=0,1,2,3)$$

worin die Formen $G_i(u)$ nur von u abhängen und den Grad n haben. Es ist aber G_i einfach gleich u_i^n; denn setzen wir z. B. in Φ_0 die Variable $x_0=0$, so erhalten wir

$$\pm u_0^n \Phi_0(u|x_1, x_2, x_3) = G_0(u)\, H(u|0, x_1, x_2, x_3),$$

und da $\Phi_0(u|x_1, x_2, x_3)$ und $H(u|0, x_1, x_2, x_3)$ sowohl in bezug auf u wie in bezug auf x den Grad n haben, so muß notwendig $G_0(u)=u_0^n$ sein. Somit erhalten wir schließlich in der Tat die wichtige Relation, die die Formen Φ_i in (4.) mit einander in Verbindung bringt:

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{\Phi_0(u|\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03})}{u_0^n} = \dfrac{\Phi_1(u|\xi_{10}, \xi_{12}, \xi_{13})}{u_1^n} = \dfrac{\Phi_2(u|\xi_{20}, \xi_{21}, \xi_{23})}{u_2^n} \\ \qquad = \dfrac{\Phi_3(u|\xi_{30}, \xi_{31}, \xi_{32})}{u_3^n} = H(u|x). \end{cases}$$

Will man also die Gleichung des Projektionskegels nur mit Hilfe dreier von den sechs Koordinaten ξ darstellen, die denselben Index i enthalten, so gelingt dies nur dadurch, daß man die Komplexgleichung $H=0$, die in beiden Variabelnreihen den Grad n hat, mit dem überflüssigen Faktor u_i^n behaftet. Andererseits läßt sich die Funktion H, weil sie und alle ihre Differentialquotienten nach den x_i bis zu denen der Ordnung $(n-1)$ hin verschwinden, wenn $x_i=u_i$ gesetzt wird, als ganze Form n-ter Ordnung von allen sechs Koordinaten ξ_{ik} darstellen.*) Diese Darstellung ist freilich wegen der quadratischen Relation, die zwischen den sechs Koordinaten ξ_{ik} besteht, nicht völlig bestimmt; man kann sie aber, wenn man will, nach *Clebsch***) dadurch zu einer bestimmten machen, daß man die stets erfüllbare Bedingung

*) s. den Zusatz.

**) Math. Ann. Bd. II, S. 1.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi_{01}\,\partial \xi_{23}} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_{02}\,\partial \xi_{31}} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_{03}\,\partial \xi_{12}} = 0$$

hinzufügt. Nimmt man irgend eine dieser Darstellungen als bekannt an, so kann man alsdann z. B. zu der Gleichungsform $\Phi_0 = 0$ zurückgelangen, indem man mit u_0^n multipliziert und auf jedes Produkt $u_0 \xi_{ik}$ die Identität

$$u_0 \xi_{ik} = u_i \xi_{0k} - u_k \xi_{0i}$$

anwendet.

Für die wirkliche Berechnung der Formen Φ_i wird es daher am besten sein, zuvörderst die Komplexgleichung $H = 0$ aufzustellen. Dies erfolgt am einfachsten, wenn man eine Sekante der Raumkurve nicht, wie bisher, durch die Strahlenkoordinaten ξ_{ik}, sondern lieber durch die ihnen proportionalen Achsenkoordinaten η_{ik} definiert. Es seien nämlich (y_0, y_1, y_2, y_3) und (v_0, v_1, v_2, v_3) die Koordinaten zweier Ebenen, welche die Gerade enthalten, und es werde

$$\eta_{ik} = y_i v_k - y_k v_i$$

gesetzt; dann ist bekanntlich

$$\xi_{01} : \xi_{02} : \xi_{03} : \xi_{23} : \xi_{31} : \xi_{12} = \eta_{23} : \eta_{31} : \eta_{12} : \eta_{01} : \eta_{02} : \eta_{03}.$$

Bei Einführung dieser Achsenkoordinaten η_{ik} gibt die Komplexgleichung $H = 0$ einfach die Bedingung dafür, daß die beiden Ebenen (y_i) und (v_i) sich auf der Kurve schneiden; man hat also die Bedingung dafür aufzusuchen, daß die beiden Divisoren

$$(6.) \qquad \begin{cases} y_0 \mathfrak{A}_0 + y_1 \mathfrak{A}_1 + y_2 \mathfrak{A}_2 + y_3 \mathfrak{A}_3 \text{ und} \\ v_0 \mathfrak{A}_0 + v_1 \mathfrak{A}_1 + v_2 \mathfrak{A}_2 + v_3 \mathfrak{A}_3 \end{cases}$$

einen gemeinsamen Teiler haben. Diese Bedingung, die als die *Resultante* der beiden Divisoren (6.) zu bezeichnen ist, ist eine homogene Form n-ter Ordnung in den beiden Variabelnreihen (y_i) und (v_i) und nach Übergang von den Achsen- zu den Strahlenkoordinaten identisch mit der linken Seite H der Komplexgleichung.

Ist z. B. die C_n^p eine Raumkurve dritter Ordnung, gegeben durch die Gleichungen:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \omega : \omega^2 : \omega^3,$$

so hat man die Resultante der beiden Funktionen

$$y(\omega) = y_0 + y_1 \omega + y_2 \omega^2 + y_3 \omega^3 \quad \text{und} \quad v(\omega) = v_0 + v_1 \omega + v_2 \omega^2 + v_3 \omega^3$$

zu bestimmen. Dies geschieht hier am besten nach der *Cayley*schen Methode, bei der aus Y und V die Funktion

$$\frac{Y(\omega)V(\omega')-Y(\omega')V(\omega)}{\omega'-\omega}=\sum_{ik}c_{ik}\omega^i\omega'^k \qquad (i,k=0,1,2)$$

zusammengesetzt wird, weil alsdann die Koeffizienten sich bereits linear aus den Determinanten η_{ik} zusammensetzen. Man erhält so:

$$H=|c_{ik}|=\begin{vmatrix}\eta_{23}, & \eta_{13}, & \eta_{03}\\ \eta_{13}, & \eta_{03}+\eta_{12}, & \eta_{02}\\ \eta_{03}, & \eta_{02}, & \eta_{01}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\xi_{01} & \xi_{20} & \xi_{12}\\ \xi_{20} & \xi_{03}+\xi_{12} & \xi_{31}\\ \xi_{12} & \xi_{31} & \xi_{23}\end{vmatrix}.$$

Will man von da durch Multiplikation mit u_0^3 zu Φ_0 übergehen, so findet man

$$\Phi_0=u_0^3H=\begin{vmatrix}u_0\xi_{01}, & -u_0\xi_{02}, & u_1\xi_{02}-u_2\xi_{01}\\ -u_0\xi_{02}, & u_0\xi_{03}+u_1\xi_{02}-u_2\xi_{01}, & u_3\xi_{01}-u_1\xi_{03}\\ u_1\xi_{02}-u_2\xi_{01}, & u_3\xi_{01}-u_1\xi_{03}, & u_2\xi_{03}-u_3\xi_{02}\end{vmatrix}.$$

Falls die Raumkurve nicht rational ist, so kann zur Bildung der Resultante der beiden Divisoren (6.) folgendes Verfahren angewendet werden. Man setze

$$\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}=\xi, \qquad \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0}=\eta, \qquad \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}=\zeta$$

und bilde die Funktionen n-ter Ordnung des Körpers:

$$y=y_0+y_1\xi+y_2\eta+y_3\zeta$$

und

$$v=v_0+v_1\xi+v_2\eta+v_3\zeta.$$

Wählt man nun irgend eine Funktion des Körpers z von der Ordnung ν als unabhängige Variable, so genügt y der Gleichung

$$G(y, z\,|\,y_0, y_1, y_2, y_3)=0,$$

welche in y den Grad ν, in z den Grad n hat und deren Koeffizienten von y_0, y_1, y_2, y_3 abhängen. Diese Gleichung, die als definierende Gleichung des Körpers angesehen werden kann, ergibt durch Differentiation nach y_0, y_1, y_2, y_3 auch ξ, η, ζ als rationale Funktionen von y und z. In der Tat erhält man, wenn G'_y die Ableitung nach y bedeutet,

$$\frac{\partial G}{\partial y_0} + G'_y = 0,$$
$$\frac{\partial G}{\partial y_1} + \xi G'_y = 0,$$
$$\frac{\partial G}{\partial y_2} + \eta G'_y = 0,$$
$$\frac{\partial G}{\partial y_3} + \zeta G'_y = 0,$$

folglich

$$v = -\frac{v_0 \frac{\partial G}{\partial y_0} + v_1 \frac{\partial G}{\partial y_1} + v_2 \frac{\partial G}{\partial y_2} + v_3 \frac{\partial G}{\partial y_3}}{G'_y} = R(y, z).$$

Betrachtet man jetzt y als unabhängige Variable, so ist die Norm von v das über alle n Wurzeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ von $G=0$ erstreckte Produkt

$$N(v) = R(y, z_1)\, R(y, z_2) \ldots R(y, z_n),$$

und als solches eine rationale Funktion von y, welche in bezug auf die v_i ganz und homogen und vom Grade n ist. Der Wert dieser Funktion für $y=0$ gibt, gleich Null gesetzt, die Bedingung dafür, daß die Gleichungen $v=0$ und $y=0$ eine gemeinsame Wurzel haben. Man erhält so zunächst eine Form n-ter Ordnung der Variabeln v_i, deren Koeffizienten *rational* von den Variabeln y_i abhängen. Bringt man alsdann diese Koeffizienten auf gemeinsame Nenner und befreit die Zähler von gemeinsamen Teilern, so erhält man schließlich die Resultante. Man kann bei der letzten Reduktion von der Bemerkung Gebrauch machen, daß die Resultante bei Vertauschung von y und v höchstens das Vorzeichen ändert.

Zusatz.

Der im Vorstehenden benutzte Satz über biquaternäre Formen läßt sich folgendermaßen erweisen:

I. Eine biquaternäre Form, welche in bezug auf die Variabeln x linear, in bezug auf die Variabeln u von beliebigem Grade n ist, läßt sich als Linearform der Linienkoordinaten ξ_{ik} in (2.) darstellen, wenn sie für $x_i = u_i$ verschwindet.

Denn ist

$$\Phi = \sum_i U_i x_i$$

und $\Sigma U_i u_i = 0$, so ergibt sich durch Differentiation dieser Identität nach u_k und Anwendung des Satzes von *Euler*, daß

$$(n+1)\,\Phi = \sum_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial u_k}(x_i u_k - x_k u_i)$$

$$= \sum_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial u_k}\,\xi_{ik}$$

ist.

II. Ist nun $H(u|x)$ die Form auf der linken Seite der Komplexgleichung, von der man weiß, daß sie mitsamt allen ihren Differentialquotienten erster, zweiter, ... $(n-1)$-ter Ordnung für $x_i = u_i$ verschwindet, so bildet man die n-te gemischte Polare von H:

$$P = \Sigma \frac{\partial^n H}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \dots \partial x_\nu}\, x_\alpha^{(1)} x_\beta^{(2)} \dots x_\nu^{(n)}, \qquad (\alpha, \beta, \dots \nu = 0, 1, 2, 3)$$

welche in bezug auf jede der n Variabelnreihen $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots x^{(n)}$ linear ist und der Voraussetzung nach identisch verschwindet, wenn eine von ihnen den u_i gleichgesetzt wird, so daß $x_i^{(h)} = u_i$ wird. Folglich wird nach dem vorigen Satze

$$P = \Sigma C (x_\alpha^{(1)} u_h - x_h^{(1)} u_\alpha)\,(x_\beta^{(2)} u_i - x_i^{(2)} u_\beta) \dots (x_\nu^{(n)} u_k - x_k^{(n)} u_\nu),$$

$$\left(\begin{smallmatrix} \alpha, \beta, \dots \nu \\ h, i, \dots k \end{smallmatrix} = 0, 1, 2, 3\right)$$

und wenn man nunmehr die n Variabelnreihen $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots x^{(n)}$ wieder alle einander gleich annimmt, so geht die Polare P bis auf einen konstanten Faktor in die Form $H(u|x)$ über, die somit als homogene Funktion n-ter Ordnung der Größen ξ_{ik} dargestellt wird.

§ 2.

Um jetzt die Doppelstrahlen des Projektionskegels unserer Kurve zu erhalten, differentiieren wir die fundamentale Identität (5.) hinter einander nach x_0, x_1, x_2, x_3, wodurch wir erhalten:

$$(7.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial x_0} = u_0^n \left(\dfrac{\partial H}{\partial \xi_{01}} u_1 + \dfrac{\partial H}{\partial \xi_{02}} u_2 + \dfrac{\partial H}{\partial \xi_{03}} u_3 \right) \\ \qquad = \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial \xi_{01}} u_1 + \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial \xi_{02}} u_2 + \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial \xi_{03}} u_3, \end{cases}$$

$$(7.)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial \xi_{01}} = u_0^{n-1}\left(\dfrac{\partial H}{\partial \xi_{10}}u_0 + \dfrac{\partial H}{\partial \xi_{12}}u_2 + \dfrac{\partial H}{\partial \xi_{13}}u_3\right), \\ -\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial \xi_{02}} = u_0^{n-1}\left(\dfrac{\partial H}{\partial \xi_{20}}u_0 + \dfrac{\partial H}{\partial \xi_{21}}u_1 + \dfrac{\partial H}{\partial \xi_{23}}u_3\right), \\ -\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial \xi_{03}} = u_0^{n-1}\left(\dfrac{\partial H}{\partial \xi_{30}}u_0 + \dfrac{\partial H}{\partial \xi_{31}}u_1 + \dfrac{\partial H}{\partial \xi_{32}}u_2\right). \end{cases}$$

Nach der bereits in I (7.) benutzten Hauptformel ist nun der Divisor $\mathfrak{D}$ der Doppelstrahlen des Projektionskegels gegeben durch den Nenner des Differentialteilers von:

$$dM = \frac{\xi_{02}\,d\xi_{03} - \xi_{03}\,d\xi_{02}}{\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial \xi_{01}}} = \frac{\xi_{23}\,dx_0 + \xi_{30}\,dx_2 + \xi_{02}\,dx_3}{u_0^{n-2}\left(\dfrac{\partial H}{\partial \xi_{01}}u_0 + \dfrac{\partial H}{\partial \xi_{21}}u_2 + \dfrac{\partial H}{\partial \xi_{31}}u_3\right)};$$

denn der zu dM gehörige Differentialteiler ist $\dfrac{\mathfrak{A}^{n-3}}{\mathfrak{D}}$, wo $\mathfrak{A}$ den gemeinsamen Nenner der vier Funktionen $x_i = \dfrac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{A}}$ bedeutet.

Das Differential dM ist in vier verschiedenen Formen darstellbar; nach Weglassung des unwesentlichen Nenners u_0^{n-2} erhält man durch Komposition mit vier beliebigen Größen h_0, h_1, h_2, h_3 die Darstellung:

$$(8.)\qquad dM = \begin{vmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} : \sum_{ik} \frac{\partial H}{\partial \xi_{ik}}(u_i h_k - u_k h_i) = \frac{\mathfrak{A}^{n-3}}{\mathfrak{D}}.$$

Die hier auftretende alternierende Bilinearform

$$(9.)\qquad \Psi \equiv \sum_{ik} \frac{\partial H}{\partial \xi_{ik}} u_i h_k$$

stellt, gleich Null gesetzt, den ersten Polarkomplex der Verbindungsgeraden der Punkte (h_i) und (u_i) in bezug auf den Sekantenkomplex $H=0$ dar und beide Komplexe haben eine Strahlenkongruenz der Ordnung $n(n-1)$ gemein, so daß durch jeden Punkt des Raumes $n(n-1)$ Kurvensekanten gehen, welche der Gleichung $\Psi = 0$ genügen. Insbesondere gehen auch durch den gegebenen Punkt (u) $n(n-1)$ solche Strahlen, so daß Ψ auf der Kurve ein Punktsystem der Ordnung $n(n-1)$ bestimmt. Von diesen $n(n-1)$ Punkten sind nun zunächst diejenigen abzusondern, deren Tangente die Gerade $[hu]$

schneidet, weil diese zu dem durch die Zählerdeterminante $\Delta = |h, dx, x, u|$ bestimmten Verzweigungsdivisor gehören; die Ordnung dieses Divisors ist $2(p-1)+2n$ (s. A. F. S. 463) und dem Range der Kurve gleich, falls dieselbe keine stationären Punkte hat. Nach Absonderung dieses Divisors bleibt ein anderer $\mathfrak{D}$ von der Ordnung $n(n-3)-2(p-1)$ zurück, der von dem Punkte h unabhängig ist und auch einen von dem Punkte u unabhängigen Faktor $\mathfrak{D}_0$ enthalten kann, der den Singularitäten der Kurve entspricht. So erhält man

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 \mathfrak{D}_u, \tag{10.}$$

wo $\mathfrak{D}_0$ den Divisor der wirklichen, der von u abhängige Faktor $\mathfrak{D}_u$ aber den Divisor der scheinbaren Doppelpunkte der Kurve (vom Punkte u aus) bedeutet.

Die Gleichung $H=0$ des Projektionskegels wird unbrauchbar, falls das Projektionszentrum (u) auf die Kurve fällt, weil, wie schon früher bemerkt, die Form H für $u_i = \mathfrak{A}_i$ identisch verschwindet. In diesem Falle zeigen aber die letzten Überlegungen, in welcher Weise die Gleichung des Projektionskegels zu bilden ist. Denn die Gleichung

$$\frac{\Psi}{\Delta} \equiv \frac{\sum_{ik} \frac{\partial H}{\partial \xi_{ik}} u_i h_k}{|h, dx, x, u|} = 0, \tag{11.}$$

die von dem willkürlichen Punkte (h_i) unabhängig ist, gibt eben die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Verbindungsgerade des Kurvenpunktes (x) und des Punktes (u) die Kurve noch ein zweites Mal schneidet. Trägt man also in $\xi_{ik} = x_i u_k - x_k u_i$ für die x_i die gegebenen algebraischen Funktionen ein, so wird der Zähler Ψ durch Δ teilbar und der Quotient ist eine ganze Form $(n-1)$-ter Ordnung von u_0, u_1, u_2, u_3, welche, gleich Null gesetzt, eben die Gleichung des Projektionskegels vom Kurvenpunkte (x) ist.

Es ist schließlich noch zu bemerken, daß die Gleichungen (7.), welche in u_0, u_1, u_2, u_3 linear sind, eine gemeinsame Lösung besitzen, weil eben der Punkt (u) Zentrum des Projektionskegels ist. Daher verschwindet die Determinante

$$\left| \frac{\partial H}{\partial \xi_{ik}} \right| \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

der alternierenden Form Ψ für alle Strahlen des Komplexes H und es ist somit für diese

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_{01}}\frac{\partial H}{\partial \xi_{23}}+\frac{\partial H}{\partial \xi_{02}}\frac{\partial H}{\partial \xi_{31}}+\frac{\partial H}{\partial \xi_{03}}\frac{\partial H}{\partial \xi_{12}}=0, \tag{12.}$$

die linke Seite also durch H teilbar. Man weiß, daß die Gleichung (12.) bei einem beliebigen Komplexe die singulären Linien und durch diese die Singularitätenfläche des Komplexes ergibt. Im Falle eines Sekantenkomplexes sind also alle seine Strahlen singulär, und der Komplex gibt somit zur Bildung einer Singularitätenfläche keine Veranlassung.

Beiträge zu den Grundlagen der analytischen Mechanik.

Von Herrn *Julius Farkas* in Klausenburg.

Insofern man die Mechanik diskreter Massenpunkte nicht bloß als schematische Grundlage für die Mechanik approximativer Bilder von Naturkörpern aufbauen will, sondern vielmehr schon in der Anlage derselben danach trachtet, daß sie einen reellen Inhalt erlange, ist man genötigt, in allen ihren wesentlichen Elementen einen möglichst engen Zusammenhang mit der Wirklichkeit herzustellen. Dies ist aber um so erstrebenswerter, als dadurch die Disposition für eine weitere Entwicklung unserer Kenntnisse an Fruchtbarkeit gewinnt.

Ich halte es daher nicht für überflüssig, wenn ich gewisse Ergebnisse der Betrachtungen, die ich in dieser Hinsicht angestellt habe, hier veröffentliche. Ich skizziere dabei fast das ganze Bild, in welchem sich die Anfänge der analytischen Mechanik vermöge der bezüglichen Ansätze darstellen, weil der Einfluß dieser Ansätze sich fast in allen Gebieten jener Anfänge zeigt. — Es liegt ferne von mir, die Berechtigung der üblichen Abstraktionen in Zweifel zu ziehen, und in den Definitionen des ersten Kapitels beabsichtige ich nur, zweckmäßige Substrate für jene Abstraktionen beizubringen. Was die Ersprießlichkeit eines derartigen Verfahrens betrifft, so verweise ich z. B. auf den Begriff der ursprünglichen Konstruktion der Relationen des Zwanges (Nr. 3), welcher sich für die Bestimmung der sprungweisen Fortsetzung eines Zwanges (Nr. 16) und für die Bestimmung reibender Bewegungen (Nr. 22) als nützlich bewährt hat.

Ich werde öfters meinen Aufsatz „Theorie der einfachen Ungleichungen“*) zitieren müssen, und ich werde das immer unter der Bezeichnung (Ungl.) tun. In bezug auf diesen Gegenstand erwähne ich aber schon jetzt die „Geometrie der Zahlen“ des Herrn *Minkowski*, welcher ich in Nr. 18 noch gedenken werde. Dieselbe ist meines Wissens die einzige Arbeit neben meinem Aufsatze, in welcher nicht die beschränkende Voraussetzung enthalten ist, daß die Anzahl der von einander unabhängigen Ungleichungen kleiner oder höchstens gleich ist der Anzahl der von einander unabhängigen determinierenden Funktionen.

I. Definitionen und Voraussetzungen.

1. *Über die Wahl der Koordinatensysteme.* Das Koordinatensystem soll für die zu betrachtenden Bewegungen immer so gewählt werden können, daß die Koordinaten der Massenpunkte als zweimal differentiierbare Funktionen der Zeit erscheinen. Geht man zu einem anderen Koordinatensysteme über, dessen Transformationskoeffizienten als zweimal differentiierbare Funktionen von der Zeit explizite oder implizite abhängen, so bewahren offenbar die Koordinaten der Massenpunkte diese Eigenschaft.

Die Koordinatensysteme sollen nun immer dementsprechend gewählt werden. Es soll aber schon jetzt für allemal noch festgesetzt werden, daß einem solchen Koordinatensysteme nie eine andere Lage zugedacht werde als die, welche von demselben tatsächlich eingenommen wird. Ein solches Koordinatensystem darf offenbar von dem wirklichen mechanischen Zustande (Ruhe oder Bewegung) der zu betrachtenden Massenpunkte, nicht aber von anderen denkbaren Bewegungen derselben abhängen, so nämlich, daß je nach den bloß gedachten Bewegungen derselben, das Koordinatensystem ebenfalls verschiedene Bewegungen ausführt, was z. B. der Fall wäre, wenn der Anfangspunkt eines Koordinatensystems unveränderlich, also für wie immer gedachte Bewegungen mit einem Massenpunkte verbunden wäre.

Ein Koordinatensystem, in welchem hier der mechanische Zustand von Massenpunkten betrachtet wird, soll also immer so gedacht werden, daß mit demselben nie eine andere Bewegung vorgenommen wird als eine

---

*) Dieses Journal Bd. 124.

gewisse einzige, nach der angegebenen Regel der Differentiierbarkeit vorgeschriebene. Solche Koordinatensysteme sollen natürliche genannt werden.

Nur unendlich kleine Änderungen, die in einem Zeitelemente wirklich entstehen, sollen mit dem Zeichen d angedeutet, aber alle, wie immer in einem Zeitelemente entstanden gedachte Änderungen mit dem Zeichen $\mathfrak{d}$ gemerkt werden dürfen. Wird also das natürliche rechtwinklige Koordinatensystem ξ, η, ζ auf das andere, ebenfalls natürliche rechtwinklige Koordinatensystem x, y, z mittels der Relationen

$$(x, y, z) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\,\xi + (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\,\eta + (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\,\zeta$$
$$\equiv (\lambda) + (\alpha)\,\xi + (\beta)\,\eta + (\gamma)\,\zeta$$

bezogen, und wird dem Punkte (x, y, z) in dem Koordinatensysteme x, y, z eine Bewegung mit der Geschwindigkeit $(\mathfrak{d}x, \mathfrak{d}y, \mathfrak{d}z) : \mathfrak{d}t$ und mit der Beschleunigung $(\mathfrak{d}^2x, \mathfrak{d}^2y, \mathfrak{d}^2z) : \mathfrak{d}t^2$ zugedacht, so hat man für $\mathfrak{d}t = dt$:

$$(\mathfrak{d}x, \mathfrak{d}y, \mathfrak{d}z) = d(\lambda) + [\xi\, d(\alpha) + (\alpha)\,\mathfrak{d}\xi] + \cdots,$$
$$(\mathfrak{d}^2x, \mathfrak{d}^2y, \mathfrak{d}^2z) = d^2(\lambda) + [\xi\, d^2(\alpha) + 2\,d(\alpha)\,\mathfrak{d}\xi + (\alpha)\,\mathfrak{d}^2\xi] + \cdots.$$

2. *Inneres und äußeres materielles System. Lagersystem, Knüpfungssystem, Zwangsbestand.* Die Massenpunkte (M), für deren mechanischen Zustand wir uns jetzt für ein natürliches Koordinatensystem interessieren, sollen im allgemeinen durch massenlose Körper $(\mathfrak{K})$ mit einander und auch mit anderen Körpern (K) verbunden sein. Letztere (K) sollen sich aber in einem, von den Massenpunkten (M) unabhängigen mechanischen Zustand befinden. Die Massenpunkte sollen sich mit diesen Körpern (K) auch in unmittelbarer Berührung befinden können, und in dem Systeme der Körper $(\mathfrak{K})$ sollen auch Bewegungen, insbesondere Deformationen stattfinden können, welche unabhängig von den Massenpunkten (M) verlaufen. Unter den Verbindungen durch die Körper $(\mathfrak{K})$ ist übrigens lediglich zu verstehen, daß infolge der Zuordnung derselben die Bewegungsfreiheit der Massenpunkte eine Einschränkung erleidet, ebenso, wie durch die unmittelbaren Berührungen, die zwischen dem Körpersystem (K) und den Massenpunkten stattfinden.

Das System der Massenpunkte (M) und der Körper $(\mathfrak{K})$ und (K) soll das innere System, der übrige materielle Inhalt des unendlichen Raumes das äußere System genannt werden. Ich nenne das System $(\mathfrak{K})$ Knüpfungssystem, und das System (K) Lagersystem. Das Gesamtsystem der Körper $(\mathfrak{K})$ und (K) nenne ich Zwangsbestand.

3. *Zwang.* Wir denken uns zur Zeit t um einen der Massenpunkte eine unendlich kleine geschlossene Fläche σ. Der materielle Inhalt, welcher von einer solchen Fläche σ umgrenzt wird, soll die Umgebung des Massenpunktes genannt werden.

Entfernt man für einen Augenblick aus der Umgebung eines Massenpunktes die darin befindlichen schweren Teile des Zwangsbestandes, so soll der Massenpunkt in natürlichen Koordinatensystemen eine unbeschränkte Bewegungsfreiheit besitzen. Ich gebe dieser Voraussetzung einen kürzeren Ausdruck, indem ich sage, daß die Beweglichkeit der Massenpunkte in einem natürlichen Koordinatensysteme lediglich durch den Zwangsbestand beschränkt werden soll.

Die Beschränkung der Bewegungsfreiheit der Massenpunkte wird Zwang genannt. Dieser soll nun außerdem immer so beschaffen sein, daß die gleichzeitig möglichen elementaren Verrückungen $(\partial x, \partial y, \partial z)$ der Massenpunkte durch einfache Relationen zwischen ihren Komponenten und dem zugehörigen Zeitelemente ∂t

$$(1.)\quad \begin{cases} \Sigma_1(A\partial x + B\partial y + C\partial z) + D_1\partial t = 0, \\ \Sigma_2(A\partial x + B\partial y + C\partial z) + D_2\partial t = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma_1(L\partial x + M\partial y + N\partial z) + O_1\partial t \geqq 0, \\ \Sigma_2(L\partial x + M\partial y + N\partial z) + O_2\partial t \geqq 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

bestimmt werden können, wo die Koeffizienten „im allgemeinen“ stetige und differentiierbare Funktionen der Örter (x, y, z) der Massenpunkte und der Zeit sind, sich bloß mit diesen Variabeln ändern (und zwar mit der Zeit nur insofern, als in dem Zwangsbestande Bewegungen stattfinden, die von den Massenpunkten unabhängig sind), für endliche Werte der Variablen endlich sind und höchstens gewöhnliche Unstetigkeitsstellen, d. h. solche von der ersten Art, besitzen. Ferner ist die Anzahl der von einander unabhängigen linken Seiten als Funktionen der Komponenten ∂x, ∂y, ∂z nie größer als die Anzahl der in denselben tatsächlich vorkommenden Komponenten $\partial x, \partial y, \partial z$. Die Anzahl der von einander unabgängigen Ungleichungen hat dabei keine obere Grenze (Ungl. II.).

Die Beziehungen (1.) sollen die Relationen des Zwanges genannt werden. Zu diesen gehört noch die Ungleichung $\partial t > 0$. Indem aber für ∂t

keine untere positive Grenze in bezug auf die Verrückungen vorgeschrieben ist, d. h. keine obere positive Grenze für die Größen der Geschwindigkeiten $(\partial x, \partial y, \partial z) : \partial t$ besonders vorliegt, so kann man schreiben:

$$(1'.) \qquad \partial t \geqq 0.$$

Nach den voranstehenden Voraussetzungen wird die Bewegungsfreiheit der Massenpunkte lediglich durch die Forderungen der Relationen (1.), (1.)′ beschränkt. Entfernt man daher aus den Umgebungen aller Massenpunkte die darin befindlichen Teile des Zwangsbestandes, so hören diese Relationen auf zu existieren.

Der durch die Relationen (1.), (1′.) charakterisierte Zwang ist allerdings ein spezieller. Überdies soll jetzt noch die folgende Einschränkung festgesetzt werden: Sind $(\partial x, \partial y, \partial z)$ in dem Zeitelemente ∂t von den Örtern (x, y, z) aus mögliche elementare Verrückungen, und ist $\partial t > dt$, so sind $(\partial x - dx, \partial y - dy, \partial z - dz)$ aus den, um das Zeitelement dt späteren Örtern $(x + dx, y + dy, z + dz)$, in dem Zeitelemente $\partial t - dt$ mögliche Verrückungen.

Außerdem soll noch von den Relationen (1.) angenommen werden, daß sie auf die Weise geschrieben sind, daß in möglichst großer Anzahl solche unter denselben vorkommen, von denen eine jede für sich einen Zwang vorstellt, der durch einen Teil des Zwangsbestandes realisiert wird, und sonst keine überflüssigen unter denselben vorkommen. In dieser, wie ich sagen will, „ursprünglichen“ Konstruktion soll das System (1.) in den allgemeinen Betrachtungen, insbesondere in den Nummern 6 und 16 verstanden werden.

Alle hier dem Zwange zugeordneten Eigenschaften gehen, wie leicht ersichtlich, aus einem natürlichen Koordinatensysteme in alle anderen natürlichen Koordinatensysteme über.

4. *Parametrische Ausdrücke des Zwanges. Stetigkeit desselben.* Die Relationen des Zwanges sollen jetzt für einen jeden Zeitpunkt parametrisch aufgelöst werden (Ungl. VI). Bedeuten ∂v ganz willkürliche, ∂w willkürliche nicht negative Parameter, so kann die Auflösung für den Zeitpunkt t in der Form geschrieben werden:

$$(2.) \quad \begin{cases} \partial x_i = F_{i1}\partial v_1 + F_{i2}\partial v_2 + \cdots + P_{i0}\partial t + P_{i1}\partial w_1 + P_{i2}\partial w_2 + \ldots, \\ \partial y_i = G_{i1}\partial v_1 + G_{i2}\partial v_2 + \cdots + Q_{i0}\partial t + Q_{i1}\partial w_1 + Q_{i2}\partial w_2 + \ldots, \\ \partial z_i = H_{i1}\partial v_1 + H_{i2}\partial v_2 + \cdots + R_{i0}\partial t + R_{i1}\partial w_1 + R_{i2}\partial w_2 + \ldots; \end{cases}$$

denn vermöge der in Nr. 3 angegebenen algebraischen Eigenschaften der Relationen des Zwanges kann ∂t als einer der Parameter benutzt werden. Es sollen übrigens die Parameter wegen mancher Zwecke in möglichst kleiner genügender Anzahl vorhanden gedacht werden.

Da die Koeffizienten in (1.) Nr. 3 wenigstens „im allgemeinen" stetige und differentiierbare Funktionen der Örter und der Zeit darstellen, so können die Ausdrücke (2.) jedenfalls auf die Weise bestimmt werden, daß die Koeffizienten derselben gleichsam als „im allgemeinen" stetige und differentiierbare Funktionen jener Variablen erscheinen.

Es soll aber noch eine weitere Verfügung getroffen werden. Betrachtet man die Methode, nach welcher gegebene einfache Relationen parametrisch aufgelöst werden könnnen (Ungl. VI), so sieht man, daß bei den in der vorigen Nummer zugelassenen Unstetigkeiten der Koeffizienten in (1.) die Parameter ∂v und ∂w immer auf die Weise angesetzt werden können, daß die Koeffizienten in (2.) für endliche Werte der Variablen ebenfalls endlich sind und höchstens Unstetigkeiten der ersten Art aufweisen. Besitzen z. B. ursprünglich gewisse Koeffizienten des Parameters ∂w_1 Unendlichkeitsstellen in endlichen Werten der Variabeln, so setze man $\partial w_1 = \psi \partial w_1'$ mit der Forderung $\psi \geqq 0$; dann kann die Funktion ψ immer auf die Weise gewählt werden, daß keine Koeffizienten des Parameters $\partial w_1'$ für endliche Werte der Variabeln unendlich werden, sondern höchstens Unstetigkeiten der ersten Art darbieten. Man kann dabei die Annahme aufrecht erhalten, daß die neuen Koeffizienten geradeso wie die alten und wie diejenigen in (1.), sich mit der Zeit nur insofern ändern, als in dem Zwangsbestande Bewegungen stattfinden, die unabhängig sind von den Massenpunkten.

Sämtliche angegebene Eigenschaften der Koeffizienten ebensowohl in (2.) wie in (1.) gehen, wie leicht ersichtlich, aus einem natürlichen Koordinatensysteme in alle anderen natürlichen Koordinatensysteme über.

Ich sage von einem Zwange, daß er in einem Zeitintervalle stetig ist, wenn die (möglichst kleine genügende) Anzahl sowohl der Parameter ∂v als auch der Parameter ∂w „im allgemeinen" (d. h. höchstens einzelne Zeitpunkte ausgenommen) fortwährend dieselbe ist, und dabei die Koeffizienten F, G, H, P, Q, R in dem gemeinten Zeitintervalle stetig sind.

5. *Bedingungsgleichungen des mechanischen Zustandes für einen stetigen Zwang.* Die wirklichen elementaren Verrückungen der Massenpunkte gehören unter die möglichen elementaren Verrückungen derselben. Man hat

also für die in dem Zeitelemente dt von den Örtern (x, y, z) aus sich ergebenden wirklichen elementaren Verrückungen (dx, dy, dz) die parametrischen Ausdrücke:

$$dx_i = F_{i1}dv_1 + F_{i2}dv_2 + \cdots + P_{i0}dt + P_{i1}dw_1 + P_{i2}dw_2 + \cdots, \quad (dw \geqq 0)$$

usw.

Ich behaupte nun, daß während eines stetigen Zwanges die Differentialparameter dw verschwinden müssen.

Bedeuten jetzt in der Tat $(\partial x, \partial y, \partial z)$ in dem Zeitelemente $\partial t > dt$ von den Örtern (x, y, z) aus mögliche Verrückungen, so sind nach Nr. 3 $(\partial x - dx,\ \partial y - dy,\ \partial z - dz)$ in dem Zeitelemente $\partial t - dt$ von den Örtern $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ aus mögliche Verrückungen. Bewahrt daher der Zwang seine Stetigkeit nach dem Zeitpunkte $t + dt$, so müssen in den parametrischen Ausdrücken der Verrückungen $(\partial x - dx, \partial y - dy, \partial z - dz)$ nämlich:

$$\partial x_i - dx_i = (F_1 + dF_{i1})(\partial v_1 - dv_1) + \cdots$$
$$+ (P_{i0} + dP_{i0})(\partial t - dt) + (P_{i1} + dP_{i1})(\partial w_1 - dw_1) + \cdots$$

usw.

die Parameter $\partial w_1 - dw_1$, $\partial w_2 - dw_2$ usw. auf nicht negative Werte beschränkt vorkommen. Sobald aber z. B. $dw_1 > 0$ ist, kann schon $\partial w_1 - dw_1$ negativ werden, denn die Parameter ∂w unterliegen in (2.) Nr. 4 keiner anderen Forderung, als daß dieselben nicht negativ sein müssen, und so darf man unter anderen $\partial w_1 = 0$ setzen. Der Zwang kann also nur so lange stetig bleiben, daß alle dw verschwinden, d. h.

$$(3.) \qquad \begin{cases} dx_i = F_{i1}dv_1 + F_{i2}dv_2 + \cdots + P_{i0}dt, \\ dy_i = G_{i1}dv_1 + G_{i2}dv_2 + \cdots + Q_{i0}dt, \\ dz_i = H_{i1}dv_1 + H_{i2}dv_2 + \cdots + R_{i0}dt. \end{cases}$$

Während eines stetigen Zwanges (1.)$\equiv$(2.) verschwinden daher in (1.) für die wirklichen elementaren Verrückungen (dx, dy, dz), die in dem Zeitelemente dt entstehen, nicht nur die linken Seiten der Gleichungen, sondern auch die linken Seiten der Ungleichungen, d. h. man hat

$$(4.)_1 \qquad \begin{cases} \Sigma_1\left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt}\right) + D_1 = 0, \\ \Sigma_2\left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt}\right) + D_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(4.)_2 \qquad \begin{cases} \Sigma_1\left(L\frac{dx}{dt}+M\frac{dy}{dt}+N\frac{dz}{dt}\right)+O_1=0, \\ \Sigma_2\left(L\frac{dx}{dt}+M\frac{dy}{dt}+N\frac{dz}{dt}\right)+O_2=0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Die Stetigkeit eines Zwanges (1.)≡(2.) ist also an die Bedingung gebunden, daß die Bewegung auf die Weise vor sich geht, daß diese Gleichungen erfüllt werden.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß während der Stetigkeit eines Zwanges die Funktionsformen der in (1.) und (2.) vorkommenden Koeffizienten sich an den Grenzen gewisser Gebiete der Variabeln (Koordinaten und der Zeit) sprungweise ändern. Diese Gebiete können immer durch bestimmte Ungleichungen zwischen den Variabeln bestimmt werden.

Bilden die Gleichungen (4.) in einem Gebiete eines stetigen Zwanges ein nicht unbeschränkt integrables System, ist also in diesem Gebiete die Anzahl der von einander unabhängigen Integralgleichungen größer als die Anzahl der von einander unabhängigen Differentialgleichungen, so treten dagegen funktionelle Unbestimmtheiten in der allgemeinen Lösung auf, außerdem können auch noch singuläre Lösungen vorkommen. Das System der Integralgleichungen kann aber nur insofern einen Vorzug haben vor dem System der Differentialgleichungen, als die in dem ersteren enthaltenen Unbestimmtheiten durch vorliegende Daten, welche unabhängig sind von dem mechanischen Zustande der Massenpunkte, bestimmte Reduktionen erfahren. In dieser Hinsicht darf in dem Rahmen bisheriger Erfahrungen behauptet werden, daß das System der Integralgleichungen ersetzt werden kann durch ein System vollends bestimmter Integralgleichungen und ein durchaus nicht vollständig integrierbares System von Differentialgleichungen, welch letztere nur solange Bestand haben, als eine oder mehrere der erhaltenen bestimmten Integralgleichungen durch die Örter der Massenpunkte erfüllt bleibt, indem gewisse Relationen des Zwanges nur solange Bestand haben, als gewisse andere bestehen. Diese sind diejenigen Relationen des Zwanges, von welchen keine für sich allein durch einen Teil des Zwangsbestandes realisiert wird (nämlich in der „ursprünglichen“ Konstruktion des Systems (1.) in Nr. 3).

6. *Spontane Unstetigkeitsstellen eines Zwanges.* Ist der Zwang (1.) ≡ (2.) stetig von dem Zeitpunkte t_0 bis zu dem Zeitpunkte t', so bestehen

in dem Zeitintervalle $t' - t_0$ die Gleichungen (4.)$\equiv$(3.). Hat man aber in dem weiteren Zeitelemente dt' für die wirklichen elementaren Verrückungen der Massenpunkte die Ausdrücke

$$dx'_i = F'_{i1}\,dv_1 + F'_{i2}\,dv_2 + \cdots + P'_{i0}\,dt' + P'_{ia}\,dw_a + P'_{ib}\,dw_b + \cdots \quad (dw > 0)$$

usw.

und für die möglichen elementaren Verrückungen gleich nach dem Zeitpunkte $t' + dt'$ die Ausdrücke:

$$\partial x'_i = (F'_{i1} + dF'_{i1})\,\partial v_1 + \cdots + (P'_{i0} + dP'_{i0})\,\partial t' + (P'_{i1} + dP'_{i1})\,\partial w_1 + \cdots$$

usw.,

so unterliegen die Parameter ∂w_a, ∂w_b, ... nicht mehr der Einschränkung, daß sie nicht negative Werte annehmen müssen (Nr. 5), und außerdem werden hier im allgemeinen, wegen Ende der vorigen Nummer, noch ganz neue Glieder, die mit willkürlichen Parametern ∂v behaftet sind, auftreten: das System der Parameter ∂v vermehrt sich wenigstens um die Parameter ∂w_a, ∂w_b, ... und das System der Parameter ∂w verringert sich um die letzteren.

Zeitpunkte t', in welchen die Stetigkeit des Zwanges auf diese Weise gestört wird, nenne ich spontane Unstetigkeitsstellen des Zwanges.

Sind an einer spontanen Unstetigkeitsstelle des Zwanges die Parameter ∂w_a, ∂w_b, ... ganz frei geworden, so hören die Ungleichungen des Zwanges in (1.), in welchen nach den Substitutionen (2.) Nr. 4 wenigstens einer der Parameter ∂w_a, ∂w_b, ... tatsächlich vorkommt, offenbar auf zu existieren: um diese Ungleichungen und eventuell um gewisse zugehörige Gleichungen (Ende der Nr. 5) verringert sich das System der Relationen (1.) und um die entsprechenden Gleichungen verringert sich das System der Gleichungen (4.); in einem „ursprünglichen“ Systeme (1.) bleiben die übrigen Relationen wie sie sind, und ebenso die entsprechenden Gleichungen in (4.), wogegen in dem Systeme (3.) der Reihe nach die Glieder auftreten:

$$P_{ia}\,dw_a + P_{ib}\,dw_b + \cdots$$
$$Q_{ia}\,dw_a + Q_{ib}\,dw_b + \cdots$$
$$R_{ia}\,dw_a + R_{ib}\,dw_b + \cdots$$

und eventuell wegen Ende der vorigen Nummer auch noch andere, mit freien Parametern behaftete Glieder aufgenommen werden müssen.

Es ist noch zu beachten, daß in dem Zeitelemente dt', in welchem die hier aufgeschriebenen Glieder zum ersten Male erscheinen, die Elemente $dw_a, dw_b, \ldots$ positive Werte haben, und daß die ganz neuen Glieder erst in dem Zeitpunkte $t'+dt'$ auftreten. Demnach hat man z. B.

$$\Sigma_z\left(L'\frac{dx'}{dt'}+M'\frac{dy'}{dt'}+N'\frac{dz'}{dt'}\right)+O_z>0,$$

wogegen man um das Zeitelement dt früher noch

$$\Sigma_z\left(L\frac{dx}{dt}+M\frac{dy}{dt}+N\frac{dz}{dt}\right)+O_z=0$$

hatte, und daraus folgt für den Zeitpunkt $t=t'-dt$:

$$\frac{d}{dt}\left[\Sigma_z\left(L\frac{dx}{dt}+M\frac{dy}{dt}+N\frac{dz}{dt}\right)+O_z\right]>0.$$

Gehören aber im Sinne der Schlußbemerkung der vorigen Nummer zu den nunmehr beiseite zu lassenden Ungleichungen des Zwanges akzessorische Gleichungen desselben, die mit jenen Ungleichungen zugleich bestehen oder fallen, so bestehen diese Gleichungen, so wie auch die Ungleichungen selbst, auch noch in dem Zeitpunkte t' — denn die ganz neuen Glieder erscheinen in den parametrischen Ausdrücken erst nach dem Zeitpunkte t' — so daß die Differentialquotienten der linken Seiten der entsprechenden Gleichungen in (4.) noch in dem Zeitpunkte $t\ (=t'-dt)$ verschwinden. Diese Bemerkungen sind für die Nr. 16 von Wichtigkeit.

7. *Freie Beschleunigung, freie Kraft. Beziehung derselben zu verschiedenen Koordinatensystemen.* Aus der Umgebung eines Massenpunktes (Nr. 3) sollen die darin befindlichen schweren Teile des Zwangsbestandes für einen Augenblick entfernt gedacht werden. Die Beschleunigung, die in diesem freien Zustande dem Massenpunkte in einem natürlichen Koordinatensysteme eben zukommen würde, nenne ich die freie Beschleunigung desselben für das Koordinatensystem, und das Produkt der freien Beschleunigung und der Masse m des Massenpunktes soll die auf den Massenpunkt wirkende freie Kraft für das benutzte Koordinatensystem genannt werden.

Es ist zu beachten, daß der Massenpunkt bei diesen Definitionen mit seiner wirklichen Geschwindigkeit behaftet in Betracht kommen soll. Geht man daher von einem natürlichen Koordinatensysteme x, y, z zu einem anderen ξ, η, ζ über, welches durch die Relation

$$(x, y, z)=(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)+(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\xi+(\beta_1, \beta_2, \beta_3)\eta+(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\zeta$$

mit dem vorigen zusammenhängt, so darf in den Gleichungen der Nr. 1, welche sich jetzt auf den augenblicklichen freien Zustand des Massenpunktes $(x, y, z)m$ mittels des Zeichens $\mathfrak{d}$ beziehen soll, in den ersten Differentialen das Zeichen d an Stelle des Zeichens $\mathfrak{d}$ gesetzt werden. $(\mathfrak{d}^2x, \mathfrak{d}^2y, \mathfrak{d}^2z):dt^2$ und $(\mathfrak{d}^2\xi, \mathfrak{d}^2\eta, \mathfrak{d}^2\zeta):dt^2$ bedeuten jetzt die freie Beschleunigung des Massenpunktes in dem einen und in dem anderen Koordinatensysteme. Dementsprechend bestehen zwischen den Komponenten X, Y, Z und Ξ, H, Z der freien Kraft die Relationen

$$\begin{aligned}
\Xi = \;& \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z \\
& - m\left(\alpha_1 \frac{d^2\lambda_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\lambda_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\lambda_3}{dt^2}\right) \\
& - m\left(\alpha_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2}\right)\xi \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& - 2m\left(\alpha_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + \alpha_3 \frac{d\gamma_3}{dt}\right)\frac{d\zeta}{dt},
\end{aligned}$$

usw.

Die hier gegebene Definition der freien Kräfte läßt die Annahme zu, daß es keine fern wirkenden Kräfte gibt. Nach dieser Definition gehört aber auch die sogenannte Widerstandskraft des umgebenden Mediums zu den freien Kräften, weil das letztere zu dem äußeren materiellen Systeme (Nr. 2) gehört. Ich werde dennoch immer Verhältnisse voraussetzen, unter welchen die freien Kräfte in einem natürlichen Koordinatensysteme als bestimmte stetige Funktionen der Zeit sowie der Örter und Geschwindigkeiten der Massenpunkte erscheinen und sich lediglich mit diesen Größen merklich ändern.

8. *Stabilität des Zwanges.* Gibt es wenigstens eine Ungleichung in (1.) Nr. 3, so sollen jetzt die während eines mechanischen Zustandes in einem stetigen Zwange auf die Massenpunkte wirkenden freien Kräfte (X, Y, Z) in andere $(X+\mathfrak{x},\ Y+\mathfrak{y},\ Z+\mathfrak{z})$ verändert werden. Die Zuwüchse $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ sollen aber die Eigenschaft haben, daß, wenn der Zwang ohne Zuführung reibender Berührungen, aber übrigens wie immer auf die Weise gesteigert würde, daß die linken Seiten der Ungleichungen in (1.) nur den Wert Null annehmen könnten, diese Zuwüchse gar keine Änderung des effektiven mechanischen Zustandes bewirken würden. Würde nun bei dem

wirklichen Zwange unter der Wirkung der freien Kräfte $(X+\mathfrak{x}, Y+\mathfrak{y}, Z+\mathfrak{z})$ derselbe mechanische Zustand sich ergeben, also keine spontane Unstetigkeit (Nr. 6) des wirklichen Zwanges auftreten, wie sonst auch die Zuwüchse $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ gewählt wurden, wenn nur die Werte derselben dabei fortwährend unter einer angebbaren Grenze liegen, so sage ich, daß der Zwang während des mechanischen Zustandes, unter der Wirkung der eben vorhandenen freien Kräfte (X, Y, Z) stabil ist.

Ist der Zwang stabil in einem natürlichen Koordinatensysteme, so ist er auch stabil in einem jeden anderen; ist nämlich der Zwang stetig in einem natürlichen Koordinatensysteme, so ist er auch in einem jeden anderen stetig.

9. *Passivität des Knüpfungssystems.* Indem wir immer ein natürliches Koordinatensystem vor Augen haben, sollen jetzt die in dem Zwangsbestande von den Massenpunkten unabhängigen Bewegungen für einen Augenblick gehemmt werden. Außerdem sollen aus den Umgebungen (Nr. 3) der Massenpunkte die daselbst befindlichen schweren Teile des Lagersystems entfernt werden. Die Massenpunkte sollen jetzt keine freien Beschleunigungen und am Anfange des Augenblickes auch keine Geschwindigkeiten besitzen.

Bleiben dieselben dann während des Augenblickes in Ruhe, wie auch derselbe und wie auch die in demselben möglichen Örter der Massenpunkte gewählt wurden, so sage ich, daß das Knüpfungssystem passiv ist, wobei ich aber voraussetze, daß das Knüpfungssystem sich reibungslos in dem inneren System befindet, und ich füge noch die Voraussetzung hinzu, daß dasselbe sich widerstandslos auch in dem äußeren Systeme befindet.

Diesmal mache ich noch die weitere Einschränkung für die nachfolgenden Betrachtungen, daß das Knüpfungssystem immer ein passives sein und sich immer auch in dem äußeren Systeme widerstandslos befinden soll.

II. Reibungslose Zustände.

10. *Allgemeiner Erfahrungssatz für reibungslose Zustände.* Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sollen mit oberen Punkten angedeutet werden. — Wenn die auf den Massenpunkt $(x, y, z)m$ wirkende freie Kraft mit (X, Y, Z) bezeichnet wird, so bestehen die Gleichungen $m\ddot{x}=X$ usw. im allgemeinen nicht, wenn ein Zwang vorhanden ist. Es gibt aber gewiß

einen Vektor (X', Y', Z'), vermöge dessen $m\ddot{x} = X + X'$ usw. Man nennt Vektoren wie (X', Y', Z') Reaktionskräfte. Sind in dem Zwangsbestande Bewegungen zugegen, die unabhängig sind von den Massenpunkten, so paßt diese Benennung nicht vollständig. Ich nenne die „Arbeit“

$$\int_0^t \Sigma(X'\,dx + Y'\,dy + Z'\,dz)$$

sämtlicher Kräfte dieser Art die Arbeit des Zwanges oder die von dem Zwange geleistete Arbeit.

Als allgemeinster Erfahrungssatz kann nun für reibungslose Zustände das folgende behauptet werden:

Massen (m), freie Beschleunigungen $(X, Y, Z) : m$, mögliche Verrückungen $(\partial x, \partial y, \partial z)$ und ein mechanischer Zustand können für ein System von Massenpunkten in einem natürlichen Koordinatensysteme dann und nur dann zusammengehörige Mannigfaltigkeiten bilden, wenn nach denselben in einem jeden Zeitelemente die möglich kleinste Arbeit von dem Zwange geleistet wird, wenn also für ein jedes Zeitelement $(\partial t = dt)$ die Ungleichung besteht:

$$\Sigma[(m\ddot{x} - X)\,\partial x + (m\ddot{y} - Y)\,\partial y + (m\ddot{z} - Z)\,\partial z]$$
$$\geqq \Sigma[(m\ddot{x} - X)\,dx + (m\ddot{y} - Y)\,dy + (m\ddot{z} - Z)\,dz].$$

Diese Ungleichung fällt freilich zusammen mit der Ungleichung der sogenannten virtuellen Momente oder virtuellen Arbeiten. Bezeichnet man die relativen Verrückungen $(\partial x - dx, \partial y - dy, \partial z - dz)$ mit $(\delta x, \delta y, \delta z)$, so hat man:

$$(5.) \qquad \Sigma[(m\ddot{x} - X)\,\delta x + (m\ddot{y} - Y)\,\delta y + (m\ddot{z} - Z)\,\delta z] \geqq 0,$$

und aus (1.) Nr. 3 und (4.) Nr. 5 entnimmt man als Beziehungen zwischen diesen relativen Verrückungen:

$$(6.) \quad \begin{cases} \Sigma_1(A\delta x + B\delta y + C\delta z) = 0, & \Sigma_2(A\delta x + B\delta y + C\delta z) = 0, \ldots \\ \Sigma_1(L\delta x + M\delta y + N\delta z) \geqq 0, & \Sigma_2(L\delta x + M\delta y + N\delta z) \geqq 0, \ldots . \end{cases}$$

Setzt man noch $\partial v - dv = \delta v$, $\partial w = \delta w$, so erhält man aus (2.) Nr. 4 und (3.) Nr. 5:

$$(7.) \quad \begin{cases} \delta x = \Sigma F\delta v + \Sigma P\delta w, \\ \delta y = \Sigma G\delta v + \Sigma Q\delta w, \\ \delta z = \Sigma H\delta v + \Sigma R\delta w. \end{cases} \qquad (\delta w \geqq 0)$$

Ferner erhält man für die Transformation eines natürlichen Koordinatensystems in ein anderes aus den Gleichungen:

$$(a.) \qquad (\partial x, \partial y, \partial z) = d(\lambda) + [\xi d(\alpha) + (\alpha)\partial\xi] + \cdots,$$

$$(b.) \qquad (dx, dy, dz) = d(\lambda) + [\xi d(\alpha) + (\alpha) d\xi] + \cdots,$$

(Nr. 1), die Vorschrift:

$$(\delta x, \delta y, \delta z) = (\alpha)\delta\xi + (\beta)\delta\eta + (\gamma)\delta\zeta,$$

das heißt

$$(1'.) \qquad \delta x = \alpha_1\delta\xi + \beta_1\delta\eta + \gamma_1\delta\zeta, \quad \text{usw.}$$

Die relativen Verrückungen $(\delta x, \delta y, \delta z)$ können in einem natürlichen Koordinatensysteme offenbar als die nach (1.) Nr. 3 mit unendlich großen Geschwindigkeiten möglichen Verrückungen $(\partial x, \partial y, \partial z)$ betrachtet werden.

Und daraus ersieht man auch schon für ein natürliches Koordinatensystem, daß diese relativen Verrückungen als die in einem Zeitelemente bei Unterdrückung aller in dem Koordinatensysteme vorkommenden Bewegungen des inneren Systems möglichen Verrückungen $(\partial x, \partial y, \partial z)$ aufgefaßt werden können.*) In der Tat ergeben die Gleichungen (4.) Nr. 5 für $(dx, dy, dz) = 0$, daß $D_1 = 0$, $O_1 = 0$ usw., wodurch die Relationen (1.) Nr. 3 in (6.) übergehen. Ferner fordern die Postulate $(dx, dy, dz) = 0$ und $(d\xi, d\eta, d\zeta) = 0$ in $(b.)$, daß die relative Bewegung der beiden Koordinatensysteme x, y, z und ξ, η, ζ durch die Gleichung

$$d(\lambda) + \xi d(\alpha) + \eta d(\beta) + \zeta d(\gamma) = 0$$

für das Zeitelement beschränkt werde, womit die Gleichung $(a.)$ in die Gleichungen (1'.) übergeht. Im allgemeinen muß zufolge der soeben gestellten Postulate die relative Bewegung der beiden Koordinatensysteme für das Zeitelement gänzlich aufgehoben gedacht werden, wenn nämlich die Anzahl der Massenpunkte größer ist als zwei und wenn dieselben nicht zufällig auf einer geraden Linie liegen.

11. *Verhalten der Koordinatensysteme.* Da ich dem Begriffe der freien Kräfte eine bestimmte allgemeine Definition beigemessen habe (Nr. 7), woraus für die Beziehungen derselben zu verschiedenen natürlichen Koordi-

*) Oder als die Verrückungen, welche bei Unterdrückung der Bewegungen (und Deformationen) des Lagersystems und der von den Massenpunkten unabhängigen Bewegungen (und Deformationen) des Knüpfungssystems möglich sind.

natensystemen eine feste Regel sich ergibt (Nr. 7), so bietet sich die Frage dar, ob der ausgesprochene Erfahrungssatz für alle natürlichen Koordinatensysteme bestehen kann oder nicht?

Transformiert man die Ungleichung (5.) aus dem gegebenen natürlichen Koordinatensysteme in ein anderes, indem man die wirklichen Beschleunigungen $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ und die virtuellen Verrückungen $(\delta x, \delta y, \delta z)$ aus dem einen Koordinatensysteme in das andere umrechnet, und beachtet man nachher die Transformationsgleichungen der freien Kräfte in Nr. 7, so sieht man, daß die Ungleichung (5.) in der neuen Form in dem neuen Koordinatensysteme dieselbe Bedeutung hat, wie in der alten in dem alten Koordinatensysteme.

Der ausgesprochene Erfahrungssatz verlangt also keine Unterscheidung zwischen verschiedenen natürlichen Koordinatensystemen.

12. *Ungleichungen, die äquivalent sind mit der Ungleichung der virtuellen Arbeiten des Zwanges.* Die für das Prinzip von *Gauß* sich ergebende Ungleichung ist während der Dauer eines stetigen Zwanges äquivalent mit der Ungleichung (5.) Nr. 10 der virtuellen Arbeiten des Zwanges, denn für die Dauer eines stetigen Zwanges kann die eine aus der anderen abgeleitet werden. Die von Herrn *Gibbs* und von Herrn *Boltzmann**) erwähnte Abweichung zeigt sich in der Tat nur in dem Momente, wo in (4.) Nr. 5 wenigstens eine der Gleichungen

$$\Sigma(L\,dx + M\,dy + N\,dz) + O\,dt = 0$$

in eine Ungleichung (>0) übergeht, womit eine spontane Unstetigkeit des Zwanges zustande kommt (Nr. 6). Diese Abweichung rührt daher, daß die Ableitung der einen Ungleichung aus der anderen unter der Annahme geschieht, daß unendlich kleinen Änderungen der Zeit und der Koordinaten, unendlich kleine Änderungen des Zwanges entsprechen, weshalb an Stelle der neuen Relationen desselben die alten gesetzt werden dürfen und umgekehrt, und das hat nur eine Berechtigung für die Dauer eines stetigen Zwanges. Diese Abweichung ist aber keine wesentliche,**) wie es aus Nr. 16 allgemein ersichtlich wird.

---

*) „Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik“ S. 223.

**) An dem von den Herren *Gibbs* und *Boltzmann* behandelten Beispiele hat es schon Herr *Réthy* in einer ungarischen Zeitschrift (Mathematikai és physikai lapok 1904) nachgewiesen.

Die Integralgleichung von *Maupertuis* und die von *Hamilton*, sind in der Darstellung von Herrn *Hölder**) und in den mannigfachen Darstellungen von Herrn *Réthy*,**) aber in Ungleichungen umgeschrieben, für einen stetigen Zwang ebenfalls äquivalent mit der Ungleichung der virtuellen Arbeiten des Zwanges.

Der über diese Ungleichung in Nr. 10 ausgesprochene Erfahrungssatz kann also auch auf jene Ungleichungen angewendet werden. Hinsichtlich der Notwendigkeit enthält freilich eine jede dieser Ungleichungen den Satz an sich, d. h. durch ihre bloße Aufstellung, nicht aber hinsichtlich der Zulänglichkeit.

13. *Die bestimmten Gleichungen und Ungleichungen der mechanischen Zustände.* Denken wir uns die Relationen des virtuellen Zwanges (6.) Nr. 10 wie in (7.) parametrisch aufgelöst:

$$\begin{aligned}
\delta x_i &= F_{i1}\delta v_1 + F_{i2}\delta v_2 + \cdots + P_{i1}\delta w_1 + P_{i2}\delta w_2 + \cdots, \\
\delta y_i &= G_{i1}\delta v_1 + G_{i2}\delta v_2 + \cdots + Q_{i1}\delta w_1 + Q_{i2}\delta w_2 + \cdots, \qquad (\delta w \leqq 0) \\
\delta z_i &= H_{i1}\delta v_1 + H_{i2}\delta v_2 + \cdots + R_{i1}\delta w_1 + R_{i2}\delta w_2 + \cdots,
\end{aligned}$$

so erhalten wir aus der Ungleichung (5.) Nr. 10 der virtuellen Arbeiten des Zwanges die bestimmten Gleichungen und Ungleichungen (Ungl. VII):

$$(8.)\quad \begin{cases}
\Sigma[F_{i1}(m\ddot{x}-X)_i + G_{i1}(m\ddot{y}-Y)_i + H_{i1}(m\ddot{z}-Z)_i] = 0, \\
\Sigma[F_{i2}(m\ddot{x}-X)_i + G_{i2}(m\ddot{y}-Y)_i + H_{i2}(m\ddot{z}-Z)_i] = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Sigma[P_{i1}(m\ddot{x}-X)_i + Q_{i1}(m\ddot{y}-Y)_i + R_{i1}(m\ddot{z}-Z)_i] \geqq 0, \\
\Sigma[P_{i2}(m\ddot{x}-X)_i + Q_{i2}(m\ddot{y}-Y)_i + R_{i2}(m\ddot{z}-Z)_i] \geqq 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}$$

Aus diesen Relationen kann man umgekehrt auf die Ungleichung der virtuellen Arbeiten des Zwanges schließen. Das System dieser bestimmten Relationen ist daher äquivalent mit der Ungleichung (5.) Nr. 10.

Nimmt man die Parameter in der möglichst kleinen genügenden Anzahl, wie es schon in Nr. 4 festgesetzt wurde, so ist die Anzahl der

---

*) „Über die Prinzipien von *Hamilton* und *Maupertuis*“ Gött. Nachr. 1896. p. 122.

**) „Über das Prinzip der Aktion und über die Klasse mechanischer Prinzipien, der es angehört“ Math. Ann. 1904. p. 169.

Parameter δv, vermehrt um die Anzahl der von einander unabhängigen linken Seiten der Relationen des virtuellen Zwanges (6.), gleich der Anzahl der Koordinaten; die Anzahl der von einander unabhängigen Gleichungen in (8.) + (4.) ist daher dieselbe; beschränkt man sich in der Tat für einen stetigen Zwang auf die virtuellen Verrückungen, durch welche alle linken Seiten in (6.) verschwinden, setzt man also alle δw gleich Null (Ungl. VII. 2), so gelangt man zu der speziellen Mechanik von *Lagrange*, bekommt aber dieselben Gleichungen.

Bei der vorausgesetzten, d. h. möglichst kleinen genügenden Anzahl der Parameter sind die Ungleichungen in (8.) vom allgemeinen Gesichtspunkte aus ebenfalls unabhängig von einander, denn für die allgemeine Bestimmung der Koeffizienten der konsekutiven Relation (5.), sind die Parameter δw sämtlich notwendig. Die Anzahl dieser Parameter, und somit die Anzahl der von einander unabhängigen bestimmten Ungleichungen unterliegt aber keiner allgemeinen Beschränkung; diese Anzahl kann auch unendlich groß ausfallen. — Es ist zu bemerken, daß mit Hilfe der bestimmten Gleichungen (4.) Nr. 5 und (8.) die Beschleunigungen aus den Ungleichungen (8.) eliminiert werden können, wodurch dieselben auf Ungleichungen zwischen der Zeit, den Örtern, den Geschwindigkeiten und den freien Kräften reduziert werden:

$$(8'.) \qquad \underset{(i=1,2,\ldots),\ (k=1,2,\ldots)}{\Omega_k(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, X_i, Y_i, Z_i) \geqq 0.}$$

14. *Die multiplikatorischen Gleichungen.* Die Ungleichung der virtuellen Arbeiten (5.) Nr. 10 ist eine konsekutive Relation der Gleichungen und Ungleichungen des virtuellen Zwanges (6.) Nr. 10. Es gibt also immer Multiplikatoren h für die Gleichungen, und nicht negative Multiplikatoren p für die Ungleichungen des virtuellen Zwanges (6.), mit welchen multipliziert und addiert, dieselben die Ungleichung der virtuellen Arbeiten (5.) identisch ergeben (Ungl. IV, V), und mithin

$$(9.) \qquad \underset{(i=1,2,\ldots),\quad (p \geqq 0)}{\begin{cases} m_i \ddot{x}_i = X_i + A_{1i} h_1 + A_{2i} h_2 + \cdots + L_{1i} p_1 + L_{2i} p_2 + \cdots, \\ m_i \ddot{y}_i = Y_i + B_{1i} h_1 + B_{2i} h_2 + \cdots + M_{1i} p_1 + M_{2i} p_2 + \cdots, \\ m_i \ddot{z}_i = Z_i + C_{1i} h_1 + C_{2i} h_2 + \cdots + N_{1i} p_1 + N_{2i} p_2 + \cdots, \end{cases}}$$

wenn nämlich durch doppelte Indices die gleichnamigen Koeffizienten der Relationen des virtuellen Zwanges (6.) unterschieden werden. Aus diesen

Ausdrücken folgt umgekehrt mittels der Relationen des virtuellen Zwanges (6.) die Ungleichung der virtuellen Arbeiten (5.). Das System dieser parametrischen Ausdrücke ist folglich ebenfalls äquivalent mit dieser Ungleichung.

Existieren in der vorigen Nummer Koeffizienten F, G, H, gibt es also Gleichungen in (8.), so können aus (9.) notwendigerweise sämtliche Multiplikatoren eliminiert werden auch dann, wenn sonst die Anzahl derselben größer ist als die der Gleichungen, und durch die Elimination derselben gelangt man zu einem Systeme von bestimmten Gleichungen, welches mit dem Systeme der in (8.) vorkommenden Gleichungen äquivalent ist. Ist die Anzahl der Multiplikatoren (h und p) nicht kleiner als die der Gleichungen (9.), so können also diese Gleichungen auf die folgende Weise geschrieben werden:

$$(9'.) \qquad \begin{cases} m_i \ddot{x}_i = X_i + \Phi_{i1} q_1 + \Phi_{i2} q_2 + \cdots, \\ m_i \ddot{y}_i = Y_i + \Psi_{i1} q_1 + \Psi_{i2} q_2 + \cdots, \\ m_i \ddot{z}_i = Z_i + X_{i1} q_1 + X_{i2} q_2 + \cdots, \end{cases}$$

d. h. so, daß die Anzahl der neuen Unbestimmten q, einfacher Funktionen der alten (h und p), kleiner wird als die Anzahl der Gleichungen, und daß die Koeffizienten Φ, Ψ, X Funktionen der Zeit und der Koordinaten sind wie die Koeffizienten A, B, C, L, M, N. — Deriviert man übrigens die Gleichungen (4.) Nr. 5 nach der Zeit, und ersetzt dann die Komponenten $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ durch ihre Ausdrücke aus (9'.), so gelangt man zu Gleichungen in $q_1, q_2, \ldots$, aus welchen diese a priori unbestimmten Größen sich als bestimmte Funktionen der Zeit, der Örter, der Geschwindigkeiten und der freien Kräfte ergeben.

Wenn sich die Multiplikatoren h und p selbst schon auf diese Weise berechnen lassen, so setze man die Ausdrücke der Multiplikatoren $p: \geqq 0$, und man hat die bestimmten Ungleichungen (8'.) Nr. 13 erhalten.

Können aber die Multiplikatoren h und p auf diese Weise nicht dargestellt werden, so empfiehlt sich folgendes Verfahren zur Gewinnung des Inhaltes der bestimmten Ungleichungen.

Es seien jetzt in (6.) Nr. 10 entweder überhaupt keine Gleichungen vorhanden, oder die vorhandenen Gleichungen von einander unabhängig. Im ersten Falle gibt es keine ganz willkürlichen Multiplikatoren h, und im letzteren Falle können die Unbestimmten q so gewählt werden, daß die Multiplikatoren h unter denselben enthalten sind. Beachtet man daher, daß

$$A_{1i}h_1 + A_{2i}h_2 + \cdots + L_{1i}p_1 + L_{2i}p_2 + \cdots \equiv \Phi_{i1}q_1 + \Phi_{i2}q_2 + \cdots,$$
$$B_{1i}h_1 + B_{2i}h_2 + \cdots + M_{1i}p_1 + M_{2i}p_2 + \cdots \equiv \Psi_{i1}q_1 + \Psi_{i2}q_2 + \cdots,$$
$$C_{1i}h_1 + C_{2i}h_2 + \cdots + N_{1i}p_1 + N_{2i}p_2 + \cdots \equiv X_{i1}q_1 + X_{i2}q_2 + \cdots,$$

so sieht man nach den zu (9′.) gemachten Bemerkungen, daß in den Gleichungen:

$$(10.) \qquad \begin{cases} L_{1i}p_1 + L_{2i}p_2 + \cdots = L_i, \\ M_{1i}p_1 + M_{2i}p_2 + \cdots = M_i, \\ N_{1i}p_1 + N_{2i}p_2 + \cdots = N \end{cases}$$

die rechten Seiten bestimmte Funktionen der Zeit, der Örter, der Geschwindigkeiten und der freien Kräfte bedeuten. In diesen Gleichungen sind die bestimmten Ungleichungen (8′.) Nr. 13 mittels der Postulate $p \geqq 0$ enthalten. Oft braucht man aber gar nicht diese bestimmten Ungleichungen zu konstruieren, sondern man übersieht den vollen Inhalt derselben, indem man die Vektoren (L_i, M_i, N_i) als Resultierende der Vektoren $(L_{ji}, M_{ji}, N_{ji})p_j$, $(p_j \geqq 0)$ ins Auge faßt.

Die bestimmten Ungleichungen ergeben sich übrigens aus den Gleichungen (10.) dadurch, daß diese Gleichungen mit gewissen, von den Multiplikatoren p unabhängigen Größen α, β, γ multipliziert und addiert, Gleichungen liefern:

$$(10'.) \qquad \begin{cases} \Sigma(\alpha_{1i}L_i + \beta_{1i}M_i + \gamma_{1i}N_i) = K_{11}p_1 + K_{12}p_2 + \cdots, \\ \Sigma(\alpha_{2i}L_i + \beta_{2i}M_i + \gamma_{2i}N_i) = K_{21}p_2 + K_{22}p_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

deren rechte Seiten (einfache Funktionen der Multiplikatoren p) lauter nicht negative Koeffizienten K enthalten, und infolgedessen anzeigen, daß die linken Seiten ebenfalls nicht negative Werte aufweisen müssen:

$$(10''.) \qquad \begin{cases} \Sigma(\alpha_{1i}L_i + \beta_{1i}M_i + \gamma_{1i}N_i) \geqq 0, \\ \Sigma(\alpha_{2i}L_i + \beta_{2i}M_i + \gamma_{2i}N_i) \geqq 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Sobald man aber den Inhalt dieser Ungleichungen vermöge der angegebenen vektoriellen Auffassung erkannt hat, ist man auch schon in der Lage, diese Ungleichungen sofort hinschreiben zu können. Es gibt sonst lediglich eine einzige analytische Methode für die Ableitung derselben, nämlich die in der vorigen Nummer aufgeführte parametrische Methode: die Forderung, die

Koeffizienten α, β, γ auf alle notwendigen Weisen so zu bestimmen, daß die Koeffizienten K nicht negative Werte erhalten, führt zu dieser Methode zurück.

15. *Die indirekten multiplikatorischen Gleichungen.* Jetzt soll nur ein Teil der Relationen des virtuellen Zwanges (6.) Nr. 19 parametrisch aufgelöst werden, und das System der parametrischen Ausdrücke in Nr. 13, nämlich

$$\delta x_i = F_{i1}\delta v_1 + \cdots + P_{i1}\delta w_1 + \cdots, \qquad \delta y_i = G_{i1}\delta v_1 + \cdots + Q_{i1}\delta w_1 + \cdots,$$
$$\delta z_i = H_{i1}\delta v_1 + \cdots + R_{i1}\delta w_1 + \ldots$$

soll jetzt nur mit jenem Teile der Relationen des virtuellen Zwanges gleichbedeutend sein. Setzt man dann diese Ausdrücke in den übrigen Teil der Relationen (6.) ein, so ist der ganze virtuelle Zwang durch diesen Teil und durch die Ungleichungen $\delta w_1 \geqq 0, \delta w_2 \geqq 0, \ldots$ dargestellt.

Substituiert man die parametrischen Ausdrücke auch in die Ungleichung der virtuellen Arbeiten (5.) Nr. 10, so hat man in derselben eine konsekutive Relation der soeben erhaltenen parametrischen Relationen des virtuellen Zwanges. Indem man nachher mittels Multiplikatoren und nicht negativen Multiplikatoren die Koeffizienten der parametrischen Ungleichung der virtuellen Arbeiten durch die Koeffizienten der parametrischen Relationen des virtuellen Zwanges ausdrückt, hat man wieder ein multiplikatorisches Gleichungssystem erhalten, welches äquivalent ist mit der Ungleichung der virtuellen Arbeiten des Zwanges.

Die bestimmten Gleichungen und der Inhalt der bestimmten Ungleichungen, ergeben sich wie aus den direkten multiplikatorischen Gleichungen in der vorigen Nummer.

16. *Über die Bestimmung der Unstetigkeitsstellen und der sprungweisen Fortsetzung eines Zwanges.* Über die Bestimmung von Unstetigkeitsstellen und der weiteren Fortsetzung eines Zwanges handelt ein Aufsatz des Herrn *A. Mayer**) und im Anschlusse daran, eine Mitteilung des Herrn *Zermelo.***) Diese Arbeiten setzen voraus, daß die linken Seiten der Relationen des

---

*) „Über die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung für reibungslose Punktsysteme, die Bedingungsungleichungen unterworfen sind", Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. 1899. S. 224.

**) „Über die Bewegung eines Punktsystems bei Ungleichungsbedingungen", Gött. Nachr. 1899. S. 306.

Zwanges (1.) Nr. 3 totale Differentiale von Funktionen der Zeit und der Örter darstellen. Außerdem enthalten sie die Voraussetzung, daß die Anzahl der von einander unabhängigen Ungleichungen des Zwanges nicht größer ist als die Anzahl der von einander unabhängigen linken Seiten derselben.

Ich beabsichtige hier, an die Stelle der Lösungsweise, welche von Herrn *Mayer* für sein Problem gegeben wurde, eine allgemeinere zu setzen, die von beiden einschränkenden Voraussetzungen frei ist. Dieses Ziel findet sich vorbereitet in den Nr. 5 und 6.

Die Beschleunigungen, welche aus den Gleichungen in (8.) Nr. 13 und nach Derivationen aus den Gleichungen (4.) Nr. 5 als Funktionen der Zeit, der Koordinaten, der Geschwindigkeiten und der freien Kräfte hervorgehen, liefern eine Bewegung, welche zufolge des aufgestellten Erfahrungssatzes (Nr. 10) unter einem stetigen Zwange (1.) Nr. 3 vor sich geht solange, und nur solange, als die Ungleichungen in (8′.) Nr. 13 befriedigt werden. In dem Momente, wo wenigstens eine der Funktionen Ω in (8′.) negativ wird, entsteht eine spontane Unstetigkeit des Zwanges.

Es fragt sich überdies, welche Relationen des Zwanges dann zu existieren aufhören.

Eine spontane Unstetigkeit des Zwanges wird dadurch charakterisiert, daß in den parametrischen Ausdrücken des virtuellen Zwanges (Nr. 10):

$$(7.)\quad \delta x_i = \Sigma F_{ik}\delta v_k + \Sigma P_{ik}\delta w_k, \qquad \delta y_i = \Sigma G_{ik}\delta v_k + \Sigma Q_{ik}\delta w_k,$$
$$\delta z_i = \Sigma H_{ik}\delta v_k + \Sigma R_{ik}\delta w_k, \qquad (\delta w \geqq 0)$$

eine oder mehrere der nicht negativen Parameter (δw) von einem Zeitpunkte an ganz frei werden, so daß dieselben von diesem Zeitpunkte an ganz beliebige Werte annehmen dürfen, und außerdem treten nachher eventuell noch ganz neue, mit willkürlichen Parametern behaftete Glieder in diesen Ausdrücken auf (Nr. 6). Letztere sollen dann in die ersten Summen aufgenommen gedacht werden. Es mögen von einem Zeitpunkte an die Parameter $\delta w_a, \delta w_b, \ldots$ frei werden. Dann hören diejenigen Ungleichungen des virtuellen Zwanges auf zu existieren, in welchen nach den Substitutionen (7.), wenigstens einer der Parameter $\delta w_a, \delta w_b, \ldots$ tatsächlich vorkommt, und von diesem Zeitpunkte an müssen in (8.) Nr. 13 die linken Seiten, welche die Koeffizienten $P_{ia}, Q_{ia}, R_{ia}; P_{ib}, Q_{ib}, R_{ib}$; usw. enthalten verschwinden; hierdurch und vermöge der neuen Parameter δv treten neue Gleichungen zu den in (8.) befindlichen. Zugleich hören aber in (4.) Nr. 5 ebensoviele

Gleichungen auf zu existieren. Für die Gleichungen (4.) hat man nämlich die parametrischen Ausdrücke (3.) Nr. 5:

$$dx_i = P_{i0}\,dt + \Sigma F_{ik}\,dv_k, \quad dy_i = Q_{i0}\,dt + \Sigma G_{ik}\,dv_k, \quad dz_i = R_{i0}\,dt + \Sigma H_{ik}\,dv_k$$

mit den alten Parametern dv, — und nach der Befreiung der Parameter $\delta w_a, \delta w_b, \ldots$ wird man haben:

$$\begin{aligned} dx_i &= P_{i0}\,dt + \Sigma F_{ik}\,dv_k + P_{ia}\,dw_a + P_{ib}\,dw_b + \ldots, \\ dy_i &= Q_{i0}\,dt + \Sigma G_{ik}\,dv_k + Q_{ia}\,dw_a + Q_{ib}\,dw_b + \ldots, \\ dz_i &= R_{i0}\,dt + \Sigma H_{ik}\,dv_k + R_{ia}\,dw_a + R_{ib}\,dw_b + \ldots, \end{aligned}$$

mit eventuell hinzugetretenen neuen Parametern dv. —

Hat man nun an den Funktionen Ω auf die vordem angegebene Weise erkannt, daß in dem Zeitpunkte t eine spontane Unstetigkeit eintritt, und verschwinden dabei in dem Zeitpunkte t die Funktionen $\Omega_\alpha, \Omega_\beta, \ldots$ in (8′.) Nr. 13, so kann diese Unstetigkeit nur darin bestehen, daß wenigstens einer der Parameter $\delta w_\alpha, \delta w_\beta, \ldots$ frei wird, und infolgedessen eventuell auch neue Parameter δv auftreten. Verschwindet in dem Zeitpunkte t eine einzige der Funktionen Ω, so ist schon damit der neue Zwang bestimmt. Verschwinden aber wenigstens zwei Funktionen Ω in diesem Zeitpunkte, so muß man untersuchen, bei welchem oder bei welchen befreit gedachten Parametern $\delta w_\alpha, \delta w_\beta, \ldots$ sich gleich nach dem Zeitpunkte t die Ergebnisse der bestimmten Gleichungen mit den bestimmten Ungleichungen vertragen, zu welchen letzteren gehört, daß die Differentiale derjenigen Ausdrücke

$$\Sigma(L\dot{x} + M\dot{y} + N\dot{z}) + O,$$

in welchen nunmehr wenigstens einer der Parameter $dw_a, dw_b, \ldots$ vorkommt, zu Beginn des neuen Zwanges positive Werte aufweisen müssen (Nr. 6).

Ist man in der Lage, nach passender Interpretation der multiplikatorischen Ausdrücke (10.) Nr. 14 die bestimmten Ungleichungen (10″.) unmittelbar hinschreiben zu können, und erkennt man in diesen Ungleichungen die Koeffizienten α, β, γ in (10′.), so kann man auch die rechten Seiten der Gleichungen (10′.) hinschreiben, denn man hat aus (10.):

$$K_{nj} = \Sigma(\alpha_{ni} L_{ji} + \beta_{ni} M_{ji} + \gamma_{ni} N_{ji}),$$

und so kann man aus den rechten Seiten der Gleichungen (10′.) entnehmen, unter welchen Ungleichungen des Zwanges diejenigen zu suchen sind, welche dadurch aufhören zu gelten, daß eine oder mehrere der Ungleichungen (10″.)

nicht mehr befriedigt werden. Es sind dies nämlich diejenigen Ungleichungen des Zwanges, mit den eventuell zugehörigen Gleichungen, deren Multiplikatoren (p) in (10′.) in Ausdrücken vorkommen, wo die linken Seiten mit dem Aufhören des alten Zwanges verschwinden. In Nr. 18 wird ein diesbezügliches Beispiel gegeben werden.

Der Eindeutigkeitsbeweis des Herrn *Zermelo* kann auch auf diese allgemeinen Erörterungen bezogen werden. Insbesondere muß aber dabei wegen der Endbemerkung der Nr. 5 die Bemerkung am Schlusse der Nr. 6 in Betracht gezogen werden, wegen des Falles nämlich, wo nicht holonome Gleichungen mit den gefährdeten Ungleichungen verbunden vorkommen.

Es war jetzt immer von einer spontanen Unstetigkeitsstelle des Zwanges die Rede. Stetigkeitsstörungen, die in einem plötzlichen Anwachsen des Zwanges bestehen, gehören im allgemeinen nur dann in den Rahmen der im ersten Artikel gemachten Voraussetzungen, wenn der plötzliche Anwachs stoßlos erfolgt. Ich verstehe darunter, daß in dem Momente, in welchem der Anwachs sich einstellt, die Massenpunkte Geschwindigkeiten besitzen, die die Bedingungsgleichungen (4.) Nr. 5 des vermehrten Zwanges befriedigen. Nimmt man jetzt die Ungleichungen (8′.) Nr. 12 so, wie dieselben dem neuen Zwange entsprechend sich ergeben, so erkennt man an denselben, wie im Falle einer spontanen Unstetigkeit, ob der momentane Anwachs des Zwanges nicht sofort gänzlich oder teilweise aufhört zu bestehen, und im letzteren Falle kann man wie im Falle einer spontanen Unstetigkeit ermitteln, welcher Teil des Zwanges weiter erhalten bleibt.

Es ist nachträglich zu bemerken, daß bei allen diesen Betrachtungen die Relationen des Zwanges gemäß der in Nr. 3 definierten „ursprünglichen“ Konstruktion zu nehmen sind, denn beiseite zu lassende Relationen dürfen in den zurückbleibenden in keiner Weise mehr zur Geltung gelangen.

17. *Kriterium für die Stabilität des Zwanges.* Ein stetiger Zwang (1.) Nr. 3 ist stabil (Nr. 8) solange und nur solange, als die Werte der Funktionen Ω in (8′.) Nr. 13 oberhalb einer angebbaren positiven Grenze liegen. Beweis:

Im Sinne der Definition der Variationen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ der freien Kräfte folgen aus den Gleichungen (8.) Nr. 13 für dieselben die Gleichungen:

$$(a.)\quad \Sigma(F_{i1}\,\mathfrak{x}_i + G_{i1}\,\mathfrak{y}_i + H_{i1}\,\mathfrak{z}_i) = 0, \quad \Sigma(F_{i2}\,\mathfrak{x}_i + G_{i2}\,\mathfrak{y}_i + H_{i2}\,\mathfrak{z}_i) = 0, \ldots .$$

Durch diese Gleichungen sind die Systeme der Zuwüchse $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ bestimmt. Die linken Seiten der Ungleichungen (8.) Nr. 13 hängen aber von diesen Zuwüchsen (nach Variation der freien Kräfte um dieselben) der Reihe nach vermöge der additiven Glieder:

$$(b.) \quad -\Sigma(P_{i1}\mathfrak{x}_i + Q_{i1}\mathfrak{y}_i + R_{i1}\mathfrak{z}_i), \quad -\Sigma(P_{i2}\mathfrak{x}_i + Q_{i2}\mathfrak{y}_i + R_{i2}\mathfrak{z}_i), \ldots$$

ab. Aus $(a.)$ folgt nun, daß die Funktionen Ω in (8'.) Nr. 13 von diesen Zuwüchsen (nach Variation der freien Kräfte um dieselben) der Reihe nach ebenfalls vermöge der Ausdrücke $(b.)$ als additiven Gliedern abhängen. Zufolge der Gleichungen $(a.)$ werden nämlich bei der Substitution der Beschleunigungen $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ aus den Gleichungen (8.) und den derivierten Gleichungen (4.) Nr. 5 in die Ungleichungen (8.) keine Zuwüchse $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ eingeführt. Nach Variation der freien Kräfte (X, Y, Z) um $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ gehen mithin die Ungleichungen (8'.) in

$$(c.) \quad \begin{cases} \Omega_1(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, X_i, Y_i, Z_i) - \Sigma(P_{i1}\mathfrak{x}_i + Q_{i1}\mathfrak{y}_i + R_{i1}\mathfrak{z}_i) \geqq 0, \\ \Omega_2(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, X_i, Y_i, Z_i) - \Sigma(P_{i2}\mathfrak{x}_i + Q_{i2}\mathfrak{y}_i + R_{i2}\mathfrak{z}_i) \geqq 0, \\ \cdots\cdots\cdots\

hätte, was doch nicht tunlich ist; denn der Parameter δw_k wäre dann in (7.) Nr. 10 ganz frei, wogegen derselbe in der Tat $\geqq 0$ sein muß. Hätte aber diese Summe für gewisse $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ einen negativen Wert, so bedenke man, daß nach $(a.)$ auch $-(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ in betracht kommen muß, und für diese Zuwüchse würde schon die k-te variierte Ungleichung, d. h. die k-te Ungleichung in $(c.)$ vor dem Zeitpunkte t_0 unrichtig werden, wie niedrig auch die obere Grenze für die Größen der Vektoren $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ angesetzt würde.

18. *Über die Anzahl der Ungleichungen eines Zwanges.* In allen Betrachtungen, denen ich in Büchern oder Zeitschriften über Ungleichungsmechanik begegnet bin, habe ich gefunden, daß dieselben stillschweigend voraussetzen, daß die Anzahl der von einander unabhängigen Ungleichungen des Zwanges nicht größer ist als die Anzahl der von einander unabhängigen linken Seiten derselben. Die Methoden namentlich, nach welchen in diesen Betrachtungen gewisse Folgerungen aus der Ungleichung der virtuellen Arbeiten oder aus der Ungleichung des kleinsten Zwanges gezogen werden, sind nur für jene Voraussetzung zulässig.*)

Dieser Umstand hat mich hauptsächlich bewogen, meine Untersuchungen, welche ich zerstreut in verschiedenen Zeitschriften dargelegt hatte, systematisch geordnet und durch manche Zusätze ergänzt in diesem Journal zu veröffentlichen.

Inzwischen ist es zu meiner Kenntnis gelangt, daß Herr *H. Minkowski* sich in seiner „Geometrie der Zahlen", ebenfalls von allgemeinem Standpunkte aus mit Ungleichungen befaßt hat.**) Seine Entwicklungen sind ebenfalls frei von der erwähnten einschränkenden Voraussetzung. Dieselben betreffen die parametrische Auflösung und den Satz von den Multiplikatoren. Ich habe zuerst den letzteren bewiesen (Ungl. IV) und dann aus diesem die erstere abgeleitet (Ungl. VI). Herr *Minkowski* hat den umgekehrten Weg eingeschlagen. Schon aus diesem Grunde sind die beiden Darstellungen von verschiedenem Charakter. Dazu kommt, daß Herr *Minkowski* in der Ableitung des Satzes der Multiplikatoren zahlengeometrische

---

*) Neben den hier schon zitierten Arbeiten erwähne ich z. B. aus den neueren Publikationen einen Aufsatz des Herrn *L. Henneberg* (Dieses Journal Bd. 113. 1894), wo (S. 182) den Variationen $\delta\tau_r$ beliebige positive unendlich kleine Werte zugeschrieben werden, und die „Grundlegung der Mechanik" von Herrn *A. Voß* (Enz. d. math. Wiss. 1901), wo die ε_k als von einander unabhängige nicht positive Variabeln behandelt werden.

**) Leipzig B. G. Teubner 1896. § 19. „Anhang über lineare Ungleichungen".

Beziehungen benutzt, während ich mich nur der geläufigen algebraischen Hilfsmittel bediene.

Jedenfalls ist einesteils in den beiden Darstellungen, anderenteils in den weiteren Auseinandersetzungen meiner Arbeit der Grund zu einer Behandlung der Mechanik gelegt, welche, wie die gegenwärtige, zuläßt, daß die Anzahl der von einander unabhängigen Ungleichungen des Zwanges größer ist als die Anzahl der von einander unabhängigen linken Seiten derselben.

Verhältnisse, unter denen diese Beziehung wirklich vorhanden ist, stellen sich aber oft ein. Es möge erlaubt sein, hier ein gewöhnliches Beispiel aufzuführen.

Beispiel. Ein starres System von Massenpunkten liegt auf einer widerstehenden glatten Unterlage als Lagersystem, die der gegenseitigen Berührung eine ebene Oberfläche darbietet.

Ist die Anzahl der äußersten anliegenden Massenpunkte (d. h. derjenigen anliegenden Massenpunkte, deren Polygon keinen anliegenden Massenpunkt ausschließt und dabei keinen konvexen inneren Winkel aufweist) größer als drei, so zeigt sich schon die soeben erwähnte Beziehung. Um dies einzusehen, möge die Starrheit des Punktsystems $(x, y, z)\ m$ durch sechs Differentialparameter ausgedrückt werden. Beschränkt man sich auf die virtuellen Verrückungen $(\delta x, \delta y, \delta z)$, so hat man als Ausdrücke der Starrheit:

$$\delta x = \delta a + z\,\delta v - y\,\delta w, \quad \delta y = \delta b + x\,\delta w - z\,\delta u, \quad \delta z = \delta c + y\,\delta u - x\,\delta v$$

mit den sechs willkürlichen Veränderlichen $\delta a, \delta b, \delta c, \delta u, \delta v, \delta w$ als Parametern. Die dritte Koordinatenachse soll von der Unterlage aus nach außen hin auf die Berührungsebene normal gerichtet werden. Dann hat man für einen jeden anliegenden Massenpunkt $(x_0, y_0, z_0)\ m_0$ den virtuellen Zwang $\delta z_0 \geqq 0$, d. h.

$$\delta c + y_0\,\delta u - x_0\,\delta v \geqq 0,$$

Ungleichungen, die nur die drei Parameter $\delta c, \delta u, \delta v$ enthalten. Die Anzahl der von einander unabhängigen linken Seiten kann daher nicht drei überschreiten. Die Anzahl der von einander unabhängigen Ungleichungen ist aber gleich der Anzahl der äußersten Berührungspunkte. Man kann in der Tat unmittelbar einsehen, daß, sobald ein Massenpunkt, welcher in einem

Eckpunkte des Berührungspolygons sich befindet, von den übrigen Massenpunkten losgelöst wird, sich schon die Bewegungsfreiheit der übrigen Massenpunkte erhöht. Sobald also eine Ungleichung $\delta z_0 \geqq 0$, die für einen Eckpunkt des Berührungspolygons gilt, weggelassen wird, vergrößert sich schon das Wertgebiet der Variabeln $(\delta a, \delta u, \delta v)$ d. h. eine jede solche Ungleichung ist von den übrigen unabhängig.

Dieses Beispiel ist zugleich auch geeignet zu zeigen, wie manche in dem vorhergehenden angegebene Verfahrungsweisen in konkreten Fällen wirklich ausgeführt werden können.

Setzt man

$$\Sigma(m\ddot{x} - X) = A, \qquad \Sigma(m\ddot{y} - Y) = B, \qquad \Sigma(m\ddot{z} - Z) = C,$$
$$\Sigma[y(m\ddot{z} - Z) - z(m\ddot{y} - Y)] = U, \quad \Sigma[z(m\ddot{x} - X) - x(m\ddot{z} - Z)] = V,$$
$$\Sigma[x(m\ddot{y} - Y) - y(m\ddot{x} - X)] = W,$$

so erhält man aus (5.) Nr. 10 für das starre System:

$$A\delta a + B\delta b + C\delta c + U\delta u + V\delta v + W\delta w \geqq 0.$$

Bedeuten daher die Größen μ nicht negative Multiplikatoren für die soeben aufgestellten Ungleichungen des Berührungszwanges, so ergibt sich:

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = \Sigma\mu,$$
$$U = \Sigma\mu y_0, \qquad V = -\Sigma\mu x_0, \qquad W = 0$$

(Nr. 15). Außerdem hat man während der Stetigkeit des Zwanges die Ungleichungen $\mu \geqq 0$, und die Gleichungen $z = \text{konst.}$, wenn die xy-Ebene in die Unterlage gelegt wird. Dazu kommen noch die bestimmten Integralgleichungen der Starrheit.

Die Achsen des Koordinatensystems x, y, z sollen in der schon angegebenen Stellung der dritten Achse zu der Unterlage liegen und letztere an der Erde befestigt werden.

Es möge zunächst lediglich die Schwere als freie Kraft vorhanden sein und die dritte Koordinatenachse, d. h. also die Normale der Berührungsebene soll mit der Richtung derselben den konstanten Winkel ε einschließen.

Man findet leicht die Gesamtheit der Bewegungen, während deren der Zwang stetig ist, d. h. immerfort dieselben Massenpunkte $(x_0, y_0, z_0)\, m_0$ sich mit der widerstehenden Ebene in Berührung befinden. Suchen wir die Bedingungen einer solchen Bewegung.

Die hierzu gehörigen Bewegungen des starren Systems werden bestimmt durch die Gleichungen $A=0$, $B=0$, $W=0$ mit Hinzunahme der Gleichungen $z=\text{konst.}$: der Massenmittelpunkt bewegt sich, wie ein einzelner, auf der Berührungsebene liegender Massenpunkt unter der Wirkung der Schwere, und das starre System dreht sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ um die durch seinen Massenmittelpunkt gelegte und auf der Berührungsebene normale Achse.

Was nun die Bedingungen dieser Bewegungsart betrifft, so werden dieselben durch die drei multiplikatorischen Gleichungen geliefert. Diese enthalten keine bestimmten Gleichungen, wohl aber bestimmte Ungleichungen. Die erste verlangt, daß $C\geqq 0$, d. h. $-P\cos\varepsilon\geqq 0$, wenn P das Gewicht des starren Systems bedeutet. Es muß also $\cos\varepsilon\leqq 0$ sein, womit gesagt wird, daß bei der Berührung des starren Systems und der widerstehenden Ebene ersteres oben und letztere unten liegen muß, denn die dritte Koordinatenachse war von der Unterlage nach außen gerichtet. Die beiden anderen multiplikatorischen Gleichungen enthalten nur implizite bestimmte Ungleichungen. Diese Gleichungen können aber, so wie sie sind, in übersichtlicher Weise interpretiert werden. Man braucht nur ein, an dem starren System befestigtes Koordinatensystem x', y', z' einzuführen, dessen dritte Achse durch den Schwerpunkt geht und mit der alten dritten Achse gleichgerichtet ist. Die beiden noch übrigen multiplikatorischen Gleichungen lauten in diesem Koordinatensysteme

$$\Sigma\mu x'_0=\dot{\theta}^2\Sigma m x' z', \qquad \Sigma\mu y'_0=\dot{\theta}^2\Sigma m y' z',$$

woraus vermöge der ersten multiplikatorischen Gleichung

$$\frac{\Sigma\mu x'_0}{\Sigma\mu}=\frac{\dot{\theta}^2\Sigma m x' z'}{-P\cos\varepsilon}, \qquad \frac{\Sigma\mu y'_0}{\Sigma\mu}=\frac{\dot{\theta}^2\Sigma m y' z'}{-P\cos\varepsilon}$$

folgt. Diese Gleichungen deuten an, daß derjenige Punkt der Berührungsebene, dessen Koordinaten gleich den hier stehenden rechten Seiten sind, in dem Berührungspolygon enthalten sein muß. In dieser und in der vorigen Forderung ($\cos\varepsilon\leqq 0$) liegen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die ermittelte Bewegungsart, vorausgesetzt natürlich, daß Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeiten den bestimmten Gleichungen $z=\text{konst.}$ entsprechen.

Ist die Berührungsebene horizontal, so daß $\varepsilon=\pi$ ist, wirkt aber außer der Schwere in einem Punkte (a', b', c') des starren Systems noch eine

vertikale freie Kraft $(0, 0, -\Phi)$ von der veränderlichen Größe $|\Phi|$, so findet man, daß der Schwerpunkt sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt und das starre System sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ um die durch den Schwerpunkt gehende vertikale Achse dreht, solange die multiplikatorischen Gleichungen

$$\Sigma\mu = P + \Phi,$$
$$\Sigma\mu x_0' = \dot{\theta}^2 \Sigma m x' z' + \Phi a',$$
$$\Sigma\mu y_0' = \dot{\theta}^2 \Sigma m y' z' + \Phi b'$$

bestehen. — Um jetzt eine Anwendung der Nr. 16 zu zeigen, soll der Einfachheit halber $\dot{\theta}$ gleich Null angenommen werden. Außerdem nehme ich an, daß $P+\Phi$ nie gleich Null wird, sondern fortwährend einen positiven Wert hat.

An Stelle des Koordinatensystems x', y', z' nehmen wir ein anderes, ebenfalls an das starre System befestigtes, welches sich von jenem darin unterscheidet, daß die dritte Achse desselben nicht durch den Schwerpunkt, aber jedenfalls durch das Innere des Berührungspolygons geht. In diesem Koordinatensysteme sollen die Koordinaten der Eckpunkte des Polygons mit x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots)$, die beiden ersten Koordinaten des Schwerpunktes, also die Koordinaten des Punktes, in welchem die Berührungsebene von der Lotlinie des Schwerpunktes getroffen wird, mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, und die beiden ersten Koordinaten des Punktes, wo die Kraft $(0, 0, -\Phi)$ eingreift, mit a, b bezeichnet werden. Jetzt hat man die multiplikatorischen Gleichungen

$$\Sigma\mu_i = P + \Phi, \quad \Sigma\mu_i x_i = \mathfrak{a} P + a\Phi, \quad \Sigma\mu_i y_i = \mathfrak{b} P + b\Phi \qquad (\mu_i \geqq 0)$$

als Bedingungen der gefundenen Bewegungsart. — Setzt man zur Abkürzung

$$P + \Phi = p, \qquad \frac{\mathfrak{a} P + a\Phi}{P + \Phi} = \xi, \qquad \frac{\mathfrak{b} P + b\Phi}{P + \Phi} = \eta,$$

so hat man die Gleichungen

$$\Sigma\mu_i = p, \qquad \Sigma\mu_i x_i = p\xi, \qquad \Sigma\mu_i y_i = p\eta. \qquad (\mu_i \geqq 0,\ p > 0)$$

Solange der Punkt (ξ, η) der Forderung $\mu_i \geqq 0$ entspricht, wird die angegebene Bewegungsart (mit der speziellen Annahme $\dot{\theta} = 0$) gelten, denn die in den letzten drei Ausdrücken enthaltenen bestimmten Ungleichungen

werden notwendigerweise erfüllt, und, wegen des vorgesetzten Zweckes, sollen jetzt vor allem diese Ungleichungen konstruiert werden (Nr. 16).

Sind der Reihe nach $1, 2, \ldots$ die Eckpunkte des Berührungspolygons und

$$1 + \alpha_{12} x + \beta_{12} y = 0, \qquad 1 + \alpha_{23} x + \beta_{23} y = 0, \ldots$$

die Gleichungen der Geraden $(1, 2)$, $(2, 3)$ usw., d. h. die Gleichungen der Randlinien des Polygons, so wird die Forderung, daß der Punkt (ξ, η) sich in dem Polygon befinde, bei der getroffenen Wahl des Koordinatensystems durch die Ungleichungen

$$1 + \alpha_{12} \xi + \beta_{12} \eta \geqq 0, \qquad 1 + \alpha_{23} \xi + \beta_{23} \eta \geqq 0, \ldots$$

gegeben. Dies sind die gesuchten bestimmten Ungleichungen. Dieselben sind offenbar unabhängig von einander.

Vergleicht man sie mit den soeben aufgeschriebenen multiplikatorischen Gleichungen, so sieht man auf der Stelle, daß

$$(1 + \alpha_{12} \xi + \beta_{12} \eta) p = \Sigma \mu_i + \alpha_{12} \Sigma \mu_i x_i + \beta_{12} \Sigma \mu_i y_i,$$

usw.

Man hat also:

$$\begin{aligned}(1 + \alpha_{12} \xi + \beta_{12} \eta) p = {} & (1 + \alpha_{12} x_1 + \beta_{12} y_1) \mu_1 \\ & + (1 + \alpha_{12} x_2 + \beta_{12} y_2) \mu_2 \\ & + (1 + \alpha_{12} x_3 + \beta_{12} y_3) \mu_3 \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \\ & \text{usw.}\end{aligned}$$

In der ausgeschriebenen Gleichung verschwinden die Koeffizienten von μ_1 und μ_2, weil die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf der Geraden $(1, 2)$ liegen. Die übrigen Koeffizienten dagegen sind alle positiv (> 0), denn die Punkte (y_3, z_3) usw. befinden sich auf der positiven Seite der Geraden $(1, 2)$, d. h. auf der Seite, auf welcher das Polygon und mithin der Anfangspunkt des Koordinatensystems sich befindet. In dem multiplikatorischen Ausdrucke von

$$(i, i+1) \equiv 1 + \alpha_{i, i+1} \xi + \beta_{i, i+1} \eta$$

fehlen also die Multiplikatoren μ_i und μ_{i+1}, und alle übrigen Multiplikatoren sind darin mit positiven Koeffizienten enthalten.

Befriedigt nun der Punkt (ξ, η) nach einem gewissen Zeitpunkte die Forderung $(i, i+1) \geqq 0$ nicht, wohl aber die übrigen Forderungen:

$$(1,2) \geqq 0, \ldots, \ (i-1, i) \geqq 0, \ (i+1, i+2) \geqq 0, \ldots,$$

so müssen von den Ungleichungen des Zwanges diejenigen unterdrückt werden, welche mit den Multiplikatoren $\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, \mu_{i+2}, \ldots$ versehen waren, d. h. die Ungleichungen $\delta z_1 \geqq 0$, $\delta z_2 \geqq 0, \ldots, \ \delta z_{i-1} \geqq 0, \ \delta z_{i+2} \geqq 0, \ldots$ hören auf zu existieren; die Eckpunkte $1, 2, \ldots i-1, i+2, \ldots$ des Polygons beginnen also sich zu erheben.

Daraus ersieht man folgendes: Befindet sich der Punkt, dessen Koordinaten in der Berührungsebene durch

$$\frac{\mathfrak{a} P + a \Phi}{P + \Phi}, \qquad \frac{\mathfrak{b} P + b \Phi}{P + \Phi}, \qquad (P + \Phi) > 0$$

dargestellt werden, anfänglich im Innern des Berührungspolygons, — bewegt sich aber dieser Punkt während einer stetigen Veränderung von Φ durch eine Randlinie des Polygons hindurch, begibt sich derselbe also auf die negative Seite dieser Randlinie, so erheben sich nur die beiden Eckpunkte nicht, die auf dieser Randlinie liegen.

Bewegt sich der Punkt während einer stetigen Veränderung von Φ durch einen Eckpunkt des Polygons hindurch und begibt sich derselbe hierbei auf die negative Seite beider anliegenden Randlinien, so muß eine in Nr. 16 allgemein angedeutete weitere Untersuchung entscheiden, ob nur dieser Eckpunkt oder eine der beiden anliegenden Randlinien, und dann, welche derselben mit der Unterlage in Berührung bleibt.

III. Über die Reibung.

19. *Erweiterung des Zwangsbegriffes.* Es soll jetzt zugelassen werden, daß in dem Lagersysteme gewisse Veränderungen vorkommen können, welche von der Bewegung der Massenpunkte und von den auf dieselben wirkenden freien Kräften veranlaßt werden.

Wird dabei die Definition der virtuellen Verrückungen $(\delta x, \delta y, \delta z)$ nach dem Wortlaut der in der Fußnote der Nr. 10 gegebenen Deutung derselben genommen, so ist man in der Lage, mittels passender Vorstellungen über jene Veränderungen zu einer statthaften Auffassung der gleitenden Reibung zwischen dem Lagersystem und den Massenpunkten zu gelangen.

Befindet sich ein Massenpunkt in relativer Ruhe mit Reibung ohne Adhäsion auf der Oberfläche des Lagersystems, so soll die Reibung so vorgestellt werden, daß der Massenpunkt unter der Einwirkung der freien Kraft eine kleine konische Einbiegung in der elastischen Grenzschicht des Lagersystems hervorgerufen hat.

Befindet sich ein Massenpunkt in relativer Bewegung mit Reibung ohne Adhäsion auf der Oberfläche des Lagersystems, so soll die Reibung so vorgestellt werden, daß unter der resultierenden Einwirkung der freien Kraft und der relativen Bewegung der Massenpunkt fortwährend ein flaches Tal in der elastischen Grenzschicht des Lagersystems hervorbringt, wobei vor dem Massenpunkte, in unmittelbarer Berührung mit ihm, sich stets ein kleiner Abhang, wie eine relative schiefe Ebene in bezug auf die Berührungsebene der Oberfläche befindet.

Wie sich zeigen wird, führen diese Auffassungen der Beziehung eines Massenpunktes zu dem Lagersysteme, bei Aufrechthaltung der Ungleichung (5.) Nr. 10 der virtuellen Arbeiten, zu den bekannten Eigenschaften der gleitenden Reibung.

20. *Zustand der relativen Ruhe.* Es wird genügen, den Fall zu betrachten, wo das Lagersystem in dem benutzten Koordinatensysteme ruht.

Die Normalen der konischen Vertiefung, als Kegelfläche, sollen nach dem Inneren des Lagersystems gerichtet sein. Bedeuten α, β, γ die Richtungskosinus einer solchen Normale der unter dem Massenpunkte $(x_i, y_i, z_i)\, m_i$ entstandenen Vertiefung, so hat man, als eine Relation des virtuellen Zwanges

$$-(\alpha \delta x_i + \beta \delta y_i + \gamma \delta z_i) \geqq 0,$$

und die Gesamtheit der Relationen, die aus der Berührung des Massenpunktes mit der Kegelfläche für die virtuellen Verrückungen entspringen, kann in die einzige multiplikatorische Ungleichung

$$-\int (\alpha \delta x_i + \beta \delta y_i + \gamma \delta z_i)\, \lambda\, Ds \geqq 0$$

zusammengefaßt werden, das heißt

$$(11.) \qquad -[\delta x_i \int \alpha \lambda\, Ds + \delta y_i \int \beta \lambda\, Ds + \delta z_i \int \gamma \lambda\, Ds] \geqq 0,$$

wo Ds ein Linienelement auf der Kegelfläche, α, β, γ die Richtungskosinus der zugehörigen Normale dieser Fläche und die λ endliche nicht negative

sonst, vorläufig wenigstens, willkürliche Größen bedeuten. Die Produkte λDs stellen nicht negative Multiplikatoren vor.

Bestehen außerdem noch für einen anderwärtigen Zwang die in (6.) Nr. 10 angegebenen Relationen, so erhält man für den Zustand der Ruhe als äquivalent mit der Ungleichung der virtuellen Arbeiten (5.) Nr. 10 die multiplikatorischen Gleichungen

$$(12.)\qquad \begin{cases} X_i + \sum\limits_k A_{ki} h_k + \sum\limits_k L_{ki} p_k = \int \alpha \lambda Ds, \\ Y_i + \sum\limits_k B_{ki} h_k + \sum\limits_k M_{ki} p_k = \int \beta \lambda Ds, \\ Z_i + \sum\limits_k C_{ki} h_k + \sum\limits_k N_{ki} p_k = \int \gamma \lambda Ds. \end{cases}$$
$$(p \geqq 0,\ \lambda \geqq 0,\ i = 1, 2, \ldots)$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind die Komponenten eines Vektors, der von der Spitze eines Kegels aus nach dem Innern desselben gerichtet ist, nämlich des Kegels, welcher von den Strahlen (α, β, γ) gebildet wird.

Ist dies ein Rotationskegel, so multipliziere man die aufgeschriebenen Gleichungen der Reihe nach mit den Richtungskosinus der gewöhnlichen lokalen Flächennormale des Lagersystems und addiere dieselben nachher. Auf diese Weise gelangt man zu der bekannten Ungleichung des Gleichgewichtes.*) Die Hälfte des Öffnungswinkels des Kegels ist der sogenannte Reibungswinkel.

21. *Bewegung.* Aus der Berührung des Massenpunktes $(x_i, y_i, z_i)\, m_i$ mit der relativen schiefen Ebene entsteht die Ungleichung

$$(13.)\qquad -(\alpha_i \delta x_i + \beta_i \delta y_i + \gamma_i \delta z_i) \geqq 0,$$

wenn nämlich $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ die Richtungskosinus der nach dem Innern des Lagersystems zeigenden Normale der schiefen Ebene sind. Aus der Berührung mit dem Boden des flachen Tales stammt hingegen die Ungleichung:

$$(14.)\qquad A_i \delta x_i + B_i \delta y_i + C_i \delta z_i \geqq 0,$$

wenn A_i, B_i, C_i die Richtungskosinus der nach außen zeigenden gewöhnlichen Flächennormale des Lagersystems in dem Punkte (x_i, y_i, z_i) bedeuten.

---

*) *John H. Jellett* „Die Theorie der Reibung“, deutsch bearb. von *J. Lüroth* und *A. Schepp*. Leipzig, B. G. Teubner, 1890, S. 23.

Die letztere Ungleichung (14.) stellt einen gewöhnlichen virtuellen Zwang vor, welcher auch bei Fortfall der erfolgten Deformation des Lagersystems vorhanden wäre.

Die Relationen (6.) Nr. 10 sollen den weiteren virtuellen Zwang vorstellen, dem die Massenpunkte eventuell noch unterworfen sind.

Demzufolge bestehen als äquivalent mit der Ungleichung der virtuellen Arbeiten die multiplikatorischen Gleichungen

$$(15.)\qquad \begin{cases} m_i \ddot{x}_i = X_i + \Sigma A_{ki} h_k + \Sigma L_{ki} p_k - P_i \alpha_i + Q_i A_i, \\ m_i \ddot{y}_i = Y_i + \Sigma B_{ki} h_k + \Sigma M_{ki} p_k - P_i \beta_i + Q_i B_i, \\ m_i \ddot{z}_i = Z_i + \Sigma C_{ki} h_k + \Sigma N_{ki} p_k - P_i \gamma_i + Q_i C_i. \end{cases}$$
$$(p \geqq 0,\ P \geqq 0,\ Q \geqq 0),\ (i = 1, 2, \ldots)$$

Bilden aber die Richtungen $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ und $-(A_i, B_i, C_i)$ den Winkel ε_i, und bedeuten L_i, M_i, N_i die Richtungskosinus der in bezug auf die Grenzschicht des Lagersystems relativen Geschwindigkeit des Massenpunktes (i), so hat man

$$\begin{aligned} \alpha_i &= L_i \sin \varepsilon_i - A_i \cos \varepsilon_i, \\ \beta_i &= M_i \sin \varepsilon_i - B_i \cos \varepsilon_i, \qquad (\cos \varepsilon_i > 0) \\ \gamma_i &= N_i \sin \varepsilon_i - C_i \cos \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$Q_i + P_i \cos \varepsilon_i = R_i, \qquad P_i \sin \varepsilon_i = R_i \mu_i,$$

so folgt für die beiden letzten Glieder der Gleichungen (15.)

$$(15'.)\qquad \begin{cases} -P_i \alpha_i + Q_i A_i = R_i (A_i - \mu_i L_i), \\ -P_i \beta_i + Q_i B_i = R_i (B_i - \mu_i M_i), \\ -P_i \gamma_i + Q_i C_i = R_i (C_i - \mu_i N_i) \end{cases}$$

im Einklange mit bekannten Gleichungen.*)

Man hat noch die Gleichungen der Nr. 5 und die Gleichung oder die Gleichungen der Oberfläche des Lagersystems. Den Ungleichungen (13.) entsprechen keine bestimmten Gleichungen für die wirkliche Bewegung; die Beweisführung in Nr. 5 kann hier in der Tat nicht angewendet werden, weil eine Gruppe der möglichen Verrückungen Deformationen in der elastischen Grenzschicht des Lagersystems veranlaßt, so daß den Ungleichungen (13.)

*) *Jellet* a. a. O., S. 111, 129.

schon keine Relationen der möglichen Verrückungen entsprechen; die Definition der virtuellen Verrückungen ist ja hier unabhängig von den möglichen Verrückungen (Nr. 19).

Befindet sich der Massenpunkt (i) lose in einer unendlich dünnen Röhre des Lagersystems, so bestehen im Sinne der angegebenen Auffassung der Reibung noch immer die Gleichungen (15.) und (15′.), nur sind die Richtungskosinus A_i, B_i, C_i jetzt durch die geometrischen Verhältnisse nicht vollkommen bestimmt, denn man kann im voraus nicht wissen, an welchem Punkte immer des durch den Massenpunkt gelegten Querschnittes die Berührung mit der Röhrenwand stattfindet. Man weiß jetzt im voraus nur soviel, daß die Richtung (A_i, B_i, C_i) in der lokalen Normalebene der Röhre liegt. Bedeuten aber A_i', B_i', C_i' und A_i'', B_i'', C_i'' die Richtungskosinus zweier nach Willkür bestimmter Normalen (A_i, B_i, C_i) unter der Bedingung, daß

$$(15.)_1 \qquad -1 < (A_i' A_i'' + B_i' B_i'' + C_i' C_i'' \equiv \cos\varpi) < 1,$$

so kann man diesen Umstand unter anderem durch die Gleichungen

$$R_i A_i = R_i' A_i' + R_i'' A_i'', \qquad R_i B_i = R_i' B_i' + R_i'' B_i'', \qquad R_i C_i = R_i' C_i' + R_i'' C_i''$$

ausdrücken, wo R_i' und R_i'' a priori ganz unbestimmte Multiplikatoren darstellen. Dieses Mal dürfen also die Gleichungen (15′.) wie folgt mit R_i' und R_i'' als zwei Unbestimmten geschrieben werden:

$$(15.)_2 \qquad \begin{cases} -P_i\alpha_i + Q_i A_i = R_i' A_i' + R_i'' A_i'' - \mu_i R_i L_i, \\ -P_i\beta_i + Q_i B_i = R_i' B_i' + R_i'' B_i'' - \mu_i R_i M_i, \\ -P_i\gamma_i + Q_i C_i = R' C_i' + R_i'' C_i'' - \mu_i R_i N_i, \\ R_i^2 = R_i'^2 + R_i''^2 + 2 R_i' R_i'' \cos\varpi, \\ R_i \geqq 0; \end{cases}$$

abermals gebräuchliche Ausdrücke. Zum Ersatze für die zweifache Unbestimmtheit (R_i', R_i'') hat man jetzt zwei Gleichungen anstatt einer für die reibende Grenzschicht, die Gleichungen für die Leitlinie der Röhre.

Befindet sich der Massenpunkt in einer zweiwändigen konkaven Ecke des Lagersystems, so sind die Kosinus (A_i', B_i', C_i') und (A_i'', B_i'', C_i'') gegeben als Richtungskosinus der nach außen oder nach innen zeigenden Normalen der Wände, und man hat im ersten Falle $R' \geqq 0$, $R_i'' \geqq 0$, im zweiten aber $-R' \geqq 0$, $-R_i'' \geqq 0$.

In betreff der „entstehenden“ Bewegung verweise ich auf die Aufsätze des Herrn *A. Mayer.**)

22. *Über die Bestimmung der reibenden Bewegung.* Postulate, wie Starrheit, Unausdehnbarkeit, Unzusammendrückbarkeit, Unabhängigkeit in dem Zwangsbestande sind Grenzbegriffe, die nur in der reibungslosen Mechanik bedingungslos als Annäherungen realisierbarer Zustände betrachtet werden können. Dieselben erfordern für die Zulässigkeit entweder die Annäherung an einen anderen Grenzbegriff, den der Reibungslosigkeit, oder die Abwesenheit zweier sehr allgemeiner Eventualitäten, die von Herrn *Painlevé* „surabondance des liaisons“ und „incompatibilité matérielle des liaisons“ genannt werden.**)

Wenn aber auch diese Ungelegenheiten nicht vorhanden sind, so kann man dennoch auf Widersprüche stoßen; es kann nämlich vorkommen, daß man für die Massenpunkte verschiedenartige mechanische Zustände findet, indem man die Relationen des Zwanges auf verschiedene Weisen konstruiert, d. h. es können verschieden geformte Systeme von Relationen analytisch äquivalent sein und doch zu verschiedenartigen mechanischen Zuständen führen. So verhält es sich in dem von Herrn *Painlevé* wiederholt behandelten Beispiele, wo zwei, durch einen massenlosen starren Stab verbundene Massenpunkte $(x, y, z)\,m$, $(x_1, y_1, z_1)\,m$ sich in zwei geraden parallelen Röhren befinden.***) Man hat in diesem Beispiele als analytisch äquivalente Gleichungssysteme für den gewöhnlichen Teil des virtuellen Zwanges:

$$\begin{cases} \cos\alpha\cdot(\delta x_1-\delta x)+\sin\alpha\cdot(\delta y_1-\delta y)=0, \\ \delta y=0,\ \delta y_1=0,\ \delta z=0,\ \delta z_1=0, \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \delta x_1-\delta x=0, \\ \delta y=0,\ \delta y_1=0,\ \delta z=0,\ \delta z_1=0. \end{cases}$$

Zu beiden gehört das Integralsystem

$$x_1-x=\text{konst},\ y=\text{konst.},\ y_1=\text{konst.},\ z=z_1=0.$$

Aus dem ersten folgen mit Rücksicht auf die Reibung die multiplikatorischen Gleichungen, mit $R, \mu, \mu_1, \nu, \nu_1$ als Multiplikatoren:

---

*) Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. 1901.

**) „Leçons sur le Frottement“. Paris (A. Hermann) 1895.

***) A. a. O., S. 35, 36; 93, 94.

$$m\ddot{x} = X - R\cos\alpha - \varepsilon f\sqrt{\mu^2+\nu^2} = m\ddot{x}_1 = X_1 + R\cos\alpha - \varepsilon f\sqrt{\mu_1^2+\nu_1^2},$$
$$m\ddot{y} = -R\sin\alpha + \mu = 0, \qquad m\ddot{y}_1 = R\sin\alpha + \mu_1 = 0,$$
$$m\ddot{z} = \nu = 0, \qquad m\ddot{z}_1 = \nu_1 = 0,$$

woraus

$$m\ddot{x} = m\ddot{x}_1 = \frac{(X+X_1)\cos\alpha + \varepsilon(fX_1 - f_1X)\sin\alpha}{2\cos\alpha + \varepsilon(f-f_1)\sin\alpha}.$$

Aus dem zweiten folgen dagegen die multiplikatorischen Gleichungen, mit $P, \varkappa, \varkappa_1, \lambda, \lambda_1$ als Multiplikatoren

$$m\ddot{x} = X - P - \varepsilon f\sqrt{\varkappa^2+\lambda^2} = m\ddot{x}_1 = X_1 + P - \varepsilon f\sqrt{\varkappa_1^2+\lambda_1^2},$$
$$m\ddot{y} = \varkappa = 0, \qquad m\ddot{y}_1 = \varkappa_1 = 0,$$
$$m\ddot{z} = \lambda = 0, \qquad m\ddot{z}_1 = \lambda_1 = 0,$$

woraus

$$m\ddot{x} = m\ddot{x}_1 = \frac{X+X_1}{2},$$

wie wenn gar keine Reibung vorhanden wäre, was doch nur statthat, wenn $X_1 = X$ ist.

Es muß also vorgeschrieben werden, nach welchem Prinzipe die Relationen des Zwanges aufgestellt werden müssen.

Dieses Prinzip besteht nun darin, daß diese Relationen auf die Weise aufgestellt werden müssen, wie es schon gegen Ende der Nr. 3 postuliert wurde („Ursprüngliche“ Konstruktion).

Zur Theorie der homogenen linearen Differentialsysteme.

Von Herrn *Ludwig Schlesinger* in Klausenburg.

In der folgenden Notiz möchte ich auf zwei Punkte meiner Arbeit*) zurückkommen, einmal um einen neuen Beweis für die Existenz der Integralsysteme eines homogenen linearen Differentialsystems im Gebiete einer realen unabhängigen Variabeln mitzuteilen, und um ferner den a. a. O.**) nur skizzierten Beweis für den „Rechteckssatz“, im Falle eines vollständig integrablen linearen Differentialsystems mit zwei realen unabhängigen Variabeln, genauer auszuführen. Ich knüpfe unmittelbar an die Erörterungen und Bezeichnungen meiner erwähnten Abhandlung an.

I.

In der Nr. I der Abhandlung BS wurde gezeigt, wie man die Existenz einer Integralmatrix des homogenen linearen Differentialsystems

$$(A.) \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa}(x)\, y_\lambda, \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

dessen Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ Funktionen der realen Variabeln x sind, erweisen kann, falls die $a_{i\varkappa}$ in einem Intervalle $(p \dots r)$ der realen Achse eindeutig und endlich sind, und der Bedingung genügen, daß die „Gesamtschwankung“

$$\sum_{\nu=1}^{m} D_\nu (x_\nu - x_{\nu-1})$$

*) Beiträge zur Theorie der Systeme lin. hom. Differentialgleichungen, dieses Journal Bd. 128, S. 263ff.; im folgenden mit BS zitiert.

**) BS, S. 270ff.

beliebig klein wird, wenn die Anzahl m der Teilungspunkte x_ν hinreichend groß und die Ausdehnung der Teilintervalle $x_\nu - x_{\nu-1}$ hinreichend klein genommen wird. Für den Beweis beriefen wir uns a. a. O. auf den von Herrn *Volterra* gelieferten Nachweis der Existenz des „Integrale destro di una sostituzione“,*) der dem Existenzbeweise für das bestimmte Integral nachgebildet und dem Begriffe der Integralmatrix völlig angepaßt ist. — Es erscheint jedoch nützlich, den in Rede stehenden Nachweis auch in der Weise zu erbringen, daß man schrittweise dem *Cauchy-Lipschitz*schen Existenzbeweise für die Integrale *beliebiger* Differentialsysteme erster Ordnung**) folgt und zusieht, wie die besondere Beschaffenheit des *linearen* Differentialsystems (A.) es möglich macht, die bei Anwendung des *Cauchy-Lipschitz*schen Verfahrens zu fordernde *Stetigkeit* der Funktionen $a_{i\varkappa}$ durch die wesentlich weitere Bedingung des Verschwindens der Gesamtschwankung an der Grenze zu ersetzen.

Wir gehen***) dem gedachten Verfahren gemäß nicht von einer Integral*matrix*, sondern von einem Integral*systeme* $y_1, \dots y_n$ aus, d. h., genauer gesprochen, nicht von einer Matrix von Anfangswerten für den Punkt $x=p$, sondern von einem Systeme $y_1^{(0)}, \dots y_n^{(0)}$ solcher Werte, teilen das Intervall $(p \dots q)$, wo $q<r$, durch die Punkte

$$p = x_0,\ x_1, \dots x_{m-1},\ q = x_m$$

in m Teile, wählen in jedem Teilintervalle $(x_{\nu-1} \dots x_\nu)$ einen willkürlichen Zwischenwert $\xi_{\nu-1}$ und bilden den Algorithmus der Differenzengleichungen

$$(1.) \qquad y_\varkappa^{(\nu)} - y_\varkappa^{(\nu-1)} = (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa}(\xi_{\nu-1})\, y_\lambda^{(\nu-1)}.$$
$$(\nu = 1, 2, \dots m),\ (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

Zunächst leiten wir zwei Ungleichungen her, die als Folge der vorausgesetzten Endlichkeit der $a_{i\varkappa}$,

$$|a_{i\varkappa}| < g, \qquad \text{für} \qquad p \leqq x \leqq q,$$

erscheinen.

---

*) Memorie della Società Ital. delle Scienze t. VI (1887).

**) *Lipschitz*, Lehrbuch der Analysis II (1880), S. 504 ff.

***) Der folgende Beweis wurde im wesentlichen am 17. Oktober 1904 in der ungar. Akademie der Wissensch. vorgetragen. (Mathem. Értesitö, XXVII, S. 486 ff.)

Nach den Definitionsgleichungen (1.) ist

$$|y_\varkappa^{(1)}| < |y_\varkappa^{(0)}| + (x_1 - x_0)\, g \sum_\lambda |y_\lambda^{(0)}|,$$

also

$$\sum_\varkappa |y_\varkappa^{(1)}| < [1 + ng(x_1 - x_0)] \sum_\varkappa |y_\varkappa^{(0)}|$$

und analog

$$\sum_\varkappa |y_\varkappa^{(\nu)}| < [1 + ng(x_\nu - x_{\nu-1})] \sum_\varkappa |y_\varkappa^{(\nu-1)}|, \qquad (\nu = 2, 3, \ldots m)$$

woraus sich

$$\sum_\varkappa |y_\varkappa^{(\nu)}| < \prod_{\mu=1}^{\nu} [1 + ng(x_\mu - x_{\mu-1})] \sum_\varkappa |y_\varkappa^{(0)}|,$$

und da

$$1 + ng(x_\mu - x_{\mu-1}) < e^{ng(x_\mu - x_{\mu-1})},^{*})$$

$$(2.) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{m} |y_\varkappa^{(\nu)}| < e^{ng(x_\nu - x_0)} \sum_{\varkappa=1}^{m} |y_\varkappa^{(0)}| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots m)$$

ergibt. Diese Ungleichung zeigt, daß die durch den Algorithmus (1.) definierten Interpolationswerte $y_1^{(\nu)}, \ldots y_n^{(\nu)}$ unterhalb einer angebbaren oberen Grenze bleiben, so lange dies für die $a_{i\varkappa}$ der Fall ist, eine Tatsache, die allein dem linearen Charakter des Differentialsystems (A.) zu danken ist.

Durch Addition der Gleichungen (1.) folgt

$$|y_\varkappa^{(m)} - y_\varkappa^{(0)}| \leqq \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} |a_{\lambda\varkappa}(\xi_{\nu-1})| \cdot |y_\lambda^{(\nu-1)}|,$$

$$< g \sum_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_\lambda |y_\lambda^{(\nu-1)}|,$$

also mit Benutzung von (2.)

$$|y_\varkappa^{(m)} - y_\varkappa^{(0)}| < g \sum_\nu (x_\nu - x_{\nu-1})\, e^{ng(x_{\nu-1} - x_0)} \sum_\lambda |y_\lambda^{(0)}|,$$

und da

$$e^{ng(x_\nu - x_{\nu-1})} < e^{ng(q-p)},$$

$$(3.) \qquad |y_\varkappa^{(m)} - y_\varkappa^{(0)}| < g\, e^{ng(q-p)} (q-p) \sum_\lambda |y_\lambda^{(0)}|,$$

eine Ungleichung, die gestattet, die Abweichung der durch den Algorithmus (1.) erzielten Endwerte $y_\varkappa^{(m)}$ von den Anfangswerten $y_\varkappa^{(0)}$ durch die Ausdehnung des Intervalles $q - p$ nach Belieben zu regulieren.

---

*) Der Gebrauch der Exponentialfunktion ließe sich natürlich auch vermeiden.

Der Nachweis, daß sich die $y_\varkappa^{(m)}$ wohlbestimmten Grenzwerten nähern, wenn man die Anzahl m der Teile in der Weise ins Unendliche wachsen läßt, daß die Ausdehnung der Teilintervalle $x_\nu - x_{\nu-1}$ ins Unendliche abnimmt, und daß diese Grenzwerte unabhängig sind von der Wahl der Teilung und der Wahl der Zwischenwerte $\xi_{\nu-1}$ wird nun, wie es in der Integralrechnung üblich ist, aus zwei Teilen bestehen.

Wir betrachten nämlich *erstens* dieselbe Teilung mit zwei verschiedenen Systemen von Zwischenwerten $\xi_{\nu-1}$, $\bar{\xi}_{\nu-1}$, setzen für die letzteren

$$(\bar{1}.) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \bar{y}_\varkappa^{(\nu)} - \bar{y}_\varkappa^{(\nu-1)} = (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_\lambda a_{\lambda\varkappa}(\bar{\xi}_{\nu-1})\, \bar{y}_\lambda^{(\nu-1)} \\ {\scriptstyle (\nu=1,2,\dots m)} \\ \bar{y}_\varkappa^{(0)} = y_\varkappa^{(0)} \end{array} \right\} \quad {\scriptstyle (\varkappa=1,2,\dots n)}$$

und vergleichen die durch die Algorithmen (1.) und ($\bar{1}.$) entstehenden Endwerte $y_\varkappa^{(m)}$ und $\bar{y}_\varkappa^{(m)}$.

Setzen wir

$$\bar{y}_\varkappa^{(\nu)} - y_\varkappa^{(\nu)} = \Delta_{\varkappa\nu}, \qquad {\scriptstyle \binom{\nu=1,2,\dots m}{\varkappa=1,2,\dots n}}$$

so ist

$$\Delta_{\varkappa\nu} = \Delta_{\varkappa,\nu-1} + (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_\lambda \left[a_{\lambda\varkappa}(\bar{\xi}_{\nu-1})\, \bar{y}_\lambda^{(\nu-1)} - a_{\lambda\varkappa}(\xi_{\nu-1})\, y_\lambda^{(\nu-1)} \right],$$

also

$$\Delta_{\varkappa\nu} = \Delta_{\varkappa,\nu-1} + (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_\lambda \left[a_{\lambda\varkappa}(\bar{\xi}_{\nu-1}) - a_{\lambda\varkappa}(\xi_{\nu-1}) \right] y_\lambda^{(\nu-1)}$$
$$+ (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_\lambda a_{\lambda\varkappa}(\xi_{\nu-1})\, \Delta_{\lambda,\nu-1}.$$

Bedeutet nun, wie in BS, D_ν die Schwankung der Matrix $(a_{i\varkappa})$ in dem Intervalle $(x_{\nu-1}, \dots x_\nu)$, d. h. die Schwankung derjenigen jener n^2 Funktionen in dem angegebenen Intervalle, die nicht kleiner ist als die Schwankung aller übrigen, so ist, da

$$x_{\nu-1} \leqq \xi_{\nu-1} \leqq x_\nu, \qquad x_{\nu-1} \leqq \bar{\xi}_{\nu-1} \leqq x_\nu,$$
$$|a_{\lambda\varkappa}(\bar{\xi}_{\nu-1}) - a_{\lambda\varkappa}(\xi_{\nu-1})| < D_\nu;$$
$${\scriptstyle (\lambda,\varkappa=1,2,\dots n)}$$

wir haben also mit Rücksicht auf die Ungleichung (2.)

$$|\Delta_{\varkappa\nu}| < |\Delta_{\varkappa,\nu-1}| + (x_\nu - x_{\nu-1})\, D_\nu\, e^{ng(x_{\nu-1}-x_0)} \sum_\lambda |y_\lambda^{(0)}|$$
$$+ (x_\nu - x_{\nu-1})\, g \sum_\lambda |\Delta_{\lambda,\nu-1}|,$$

und indem wir in bezug auf $\varkappa$ von 1 bis n summieren,

$$(4.) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} |\Delta_{\varkappa\nu}| < E_\nu + [1 + ng(x_\nu - x_{\nu-1})] \sum_{\varkappa} |\Delta_{\varkappa,\nu-1}|,$$

wo

$$E_\nu = n(x_\nu - x_{\nu-1}) D_\nu e^{ng(x_{\nu-1}-x_0)} \sum_{\varkappa} |y_\varkappa^{(0)}|$$

gesetzt ist. — Hat man ein System von Ungleichungen der Form

$$(a.) \qquad \Delta_\nu < E_\nu + [1 + ng(x_\nu - x_{\nu-1})]\Delta_{\nu-1}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots m)$$

so folgt daraus, mit Rücksicht auf die Ungleichung

$$[1 + ng(x_m - x_{m-1})][1 + ng(x_{m-1} - x_{m-2})] \cdots [1 + ng(x_\nu - x_{\nu-1})] < e^{ng(x_m - x_{\nu-1})},$$

$$(b.) \qquad \Delta_m < \sum_{\nu=1}^{m} e^{ng(x_m - x_\nu)} E_\nu;$$

also ergibt (4.)

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} |\Delta_{\varkappa m}| < \sum_{\nu=1}^{m} e^{ng(x_m - x_\nu)} n(x_\nu - x_{\nu-1}) D_\nu e^{ng(x_{\nu-1} - x_0)} \cdot \sum_{\varkappa} |y_\varkappa^{(0)}|,$$

das heißt

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} |\Delta_{\varkappa m}| < e^{ng(q-p)} n \sum_{\varkappa} |y_\varkappa^{(0)}| \cdot \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1}) D_\nu.$$

Es können demnach, wenn die Gesamtschwankung

$$\sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1}) D_\nu$$

beliebig klein gemacht werden kann, auch die Differenzen $\bar{y}_\varkappa^{(m)} - y_\varkappa^{(m)}$ beliebig klein gemacht werden, und umgekehrt ist diese Bedingung, wie man sofort übersieht, auch *notwendig*.

Wir betrachten nun *zweitens* eine aus der ursprünglichen Teilung hervorgegangene *Unterteilung*, bei der das Intervall $(x_{\nu-1}, \ldots x_\nu)$ durch die Punkte

$$x_{\nu-1} = \mathfrak{x}_0, \quad \mathfrak{x}_1, \cdots \mathfrak{x}_{m-1}, \quad \mathfrak{x}_m = x_\nu$$

geteilt und in dem Intervalle $(\mathfrak{x}_{i-1}, \ldots \mathfrak{x}_i)$ der Zwischenwert η_{i-1} gewählt wird. Es mögen durch den für die Unterteilung gebildeten Algorithmus (1.) für den Punkt x_λ der ursprünglichen Teilung die Werte $\bar{y}_\varkappa^{(\lambda)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots n)$ resultieren, dann handelt es sich um die Vergleichung der $\bar{y}_\varkappa^{(m)}$ mit den $y_\varkappa^{(m)}$.

Wir setzen

$$\overline{y}_\varkappa^{(\nu-1)} = \mathfrak{y}_\varkappa^{(0)}, \qquad \overline{y}_\varkappa^{(\nu)} = \mathfrak{y}_\varkappa^{(m)},$$

$$(1^a.) \qquad \mathfrak{y}_\varkappa^{(\lambda)} = \mathfrak{y}_\varkappa^{(\lambda-1)} + (x_\lambda - x_{\lambda-1}) \sum_{i=1}^{n} a_{i\varkappa}(\eta_{\lambda-1})\, \mathfrak{y}_i^{(\lambda-1)}, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots m)$$

dann ergibt sich zunächst aus der Ungleichung (3.)

$$|\mathfrak{y}_\varkappa^{(\lambda-1)} - y_\varkappa^{(0)}| < g\, e^{ng(x_{\lambda-1}-x_0)} (x_{\lambda-1} - x_0) \sum_\varkappa |\mathfrak{y}_\varkappa^{(0)}|,$$

also, da nach (2.)

$$\sum_\varkappa |\mathfrak{y}_\varkappa^{(0)}| < e^{ng(x_{\nu-1}-x_0)} \sum_\varkappa |y_\varkappa^{(0)}|,$$

$$|\mathfrak{y}_\varkappa^{(\lambda-1)} - \mathfrak{y}_\varkappa^{(0)}| < g\, e^{ng(x_{\lambda-1}-x_0)} (x_{\lambda-1} - x_0) \sum_\varkappa |y_\varkappa^{(0)}|,$$

somit a potiori

$$|\mathfrak{y}_\varkappa^{(\lambda-1)} - \mathfrak{y}_\varkappa^{(0)}| < g\, e^{ng(q-p)} (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_\varkappa |y_\varkappa^{(0)}|.$$

Bedeutet also δ eine positive Größe von vorgeschriebener Kleinheit, und wählen wir die ursprüngliche Teilung derart, daß

$$(5.) \qquad x_\nu - x_{\nu-1} < \frac{\delta}{g\, e^{ng(q-p)} \sum_\varkappa |y_\varkappa^{(0)}|}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots m)$$

so ist für jeden Wert von ν

$$(5^a.) \qquad |\mathfrak{y}_\varkappa^{(\lambda-1)} - \mathfrak{y}_\varkappa^{(0)}| < \delta. \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots m+1)$$

Nun folgt durch Addition der Gleichungen (1ª.)

$$\mathfrak{y}_\varkappa^{(m)} = \mathfrak{y}_\varkappa^{(0)} + \sum_{\lambda=1}^{m} (x_\lambda - x_{\lambda-1}) \sum_{i=1}^{n} a_{i\varkappa}(\eta_{\lambda-1})\, \mathfrak{y}_i^{(\lambda-1)}.$$

Es ist jedoch

$$\sum_i [a_{i\varkappa}(\eta_{\lambda-1})\, \mathfrak{y}_i^{(\lambda-1)} - a_{i\varkappa}(\eta_0)\, \mathfrak{y}_i^{(0)}] = \sum_i [a_{i\varkappa}(\eta_{\lambda-1}) - a_{i\varkappa}(\eta_0)]\, \mathfrak{y}_i^{(0)} + \sum_i a_{i\varkappa}(\eta_{\lambda-1})\, (\mathfrak{y}_i^{(\lambda-1)} - \mathfrak{y}_i^{(0)}),$$

also mit Rücksicht auf (5ª.)

$$\sum_i |a_{i\varkappa}(\eta_{\lambda-1})\, \mathfrak{y}_i^{(\lambda-1)} - a_{i\varkappa}(\eta_0)\, \mathfrak{y}_i^{(0)}| < D_\nu \sum_i |\mathfrak{y}_i^{(0)}| + g\, n\, \delta,$$

d. h. wir haben

$$\sum_i a_{i\varkappa}(\eta_{\lambda-1})\, \mathfrak{y}_i^{(\lambda-1)} = \sum_i a_{i\varkappa}(\eta_0)\, \mathfrak{y}_i^{(0)} + \theta_{\lambda-1} (D_\nu \sum_i |\mathfrak{y}_i^{(0)}| + g\, n\, \delta),$$

wo $|\theta_{\lambda-1}| < 1$. Es ergibt sich demnach

$$\eta_z^{(m)} = \eta_z^{(0)} + (x_\nu - x_{\nu-1}) \{ \sum_i a_{iz}(\eta_0)\, \eta_i^{(0)} + \theta (D_\nu \sum_i |\eta_i^{(0)}| + gn\delta) \},$$

wo $|\theta| < 1$. Subtrahieren wir von dieser Gleichung die Gleichung

$$y_z^{(\nu)} = y_z^{(\nu-1)} + (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_i a_{iz}(\xi_{\nu-1})\, y_i^{(\nu-1)},$$

so erhalten wir

$$\eta_z^{(m)} - y_z^{(\nu)} = \eta_z^{(0)} - y_z^{(\nu-1)} + (x_\nu - x_{\nu-1}) \{ \sum_i [a_{iz}(\eta_0)\, \eta_i^{(0)} - a_{iz}(\xi_{\nu-1})\, y_i^{(\nu-1)}] + \theta (D_\nu \sum_i |\eta_i^{(0)}| + gn\delta) \},$$

und da

$$\sum_i |a_{iz}(\eta_0)\, \eta_i^{(0)} - a_{iz}(\xi_{\nu-1})\, y_i^{(\nu-1)}| < D_\nu \sum_i |\eta_i^{(0)}| + g \sum_i |\eta_i^{(0)} - y_i^{(\nu-1)}|,$$

so ergibt sich, wenn wir für $\eta_z^{(m)}$, $\eta_z^{(0)}$ wieder $\bar{y}_z^{(\nu)}$, $\bar{y}_z^{(\nu-1)}$ setzen,

$$|\bar{y}_z^{(\nu)} - y_z^{(\nu)}| < |\bar{y}_z^{(\nu-1)} - y_z^{(\nu-1)}| + (x_\nu - x_{\nu-1}) \{ 2 D_\nu \sum_i |\bar{y}_i^{(\nu-1)}| + g \sum_i |\bar{y}_i^{(\nu-1)} - y_i^{(\nu-1)}| + gn\delta \},$$

und indem wir in bezug auf z von 1 bis n summieren:

$$\sum_{z=1}^{n} |\bar{y}_z^{(\nu)} - y_z^{(\nu)}| < \sum_{z=1}^{n} |\bar{y}_z^{(\nu-1)} - y_z^{(\nu-1)}| (1 + ng(x_\nu - x_{\nu-1})) + (x_\nu - x_{\nu-1}) \{ 2n D_\nu \sum_i |\bar{y}_i^{(\nu-1)}| + n^2 g\delta \}.$$

Nun ist nach Ungleichung (2.)

$$\sum_i |\bar{y}_i^{(\nu-1)}| < e^{ng(x_{\nu-1} - x_0)} \sum_i |y_i^{(0)}|;$$

wir finden also die wichtige Ungleichung

$$\sum_{z=1}^{n} |\bar{y}_z^{(\nu)} - y_z^{(\nu)}| < \sum_{z=1}^{n} |\bar{y}_z^{(\nu-1)} - y_z^{(\nu)}| (1 + ng(x_\nu - x_{\nu-1})) + (x_\nu - x_{\nu-1}) (2n D_\nu e^{ng(x_{\nu-1} - x_0)} \sum_i |y_i^{(0)}| + n^2 g\delta).$$

Diese Ungleichung ist wieder von der Form (a.), wir erhalten also nach (b.)

$$\sum_z |\bar{y}_z^{(m)} - y_z^{(m)}| < \sum_{\nu=1}^{m} e^{ng(q-p)} (x_\nu - x_{\nu-1}) (2n D_\nu e^{(x_{\nu-1} - x_0) ng} \sum_i |y_i^{(0)}| + n^2 g\delta),$$

$$< e^{2ng(q-p)} \sum_i |y_i^{(0)}|\, 2n \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1}) D_\nu + e^{ng(q-p)}\, n^2 g(q-p)\delta.$$

Wenn nun die a_{iz} so beschaffen sind, daß die Gesamtschwankung

$$\sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1}) D_\nu$$

durch Verkleinerung der Intervalle $(x_{\nu-1}, \dots x_\nu)$ beliebig klein gemacht werden kann, so kann man im Sinne der gefundenen Ungleichung die Intervalle $x_\nu - x_{\nu-1}$ der ursprünglichen Teilung so klein wählen, daß für eine *beliebige* Unterteilung die Differenzen $|\overline{y}_\varkappa^{(m)} - y_\varkappa^{(m)}|$ vorgeschrieben klein ausfallen. Hiernach kann nun der Beweis für die Existenz der

$$\lim_m y_\varkappa^{(m)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

in bekannter Weise vollendet werden.*)

II.

Wir wenden uns nun zu einer genaueren Ausführung des in der Nr. II von BS nur skizzierten Beweises für die Existenz eindeutiger Funktionalmatrizen, die das a. a. O. mit (B.) bezeichnete vollständig integrable lineare Differentialsystem mit zwei realen unabhängigen Variabeln befriedigen.**) Wir knüpfen ohne weitere Erklärung an die Bezeichnungen der erwähnten Abhandlung an.

Es seien (ξ_0, η_0), (ξ, η) zwei Punkte des Bereiches S, für welche das Rechteck

$$(\xi_0, \eta_0), (\xi, \eta_0), (\xi, \eta), (\xi_0, \eta)$$

ganz innerhalb S gelegen ist. Bilden wir dann die beiden Matrizen

$$(1.) \qquad (v_{i\varkappa}) = \int_{\eta_0}^{\eta} (\beta_{i\varkappa}(\xi_0, \eta)\, d\eta + \delta_{i\varkappa}) \cdot \int_{\xi_0}^{\xi} (\alpha_{i\varkappa}(\xi, \eta)\, d\xi + \delta_{i\varkappa}),$$

$$(2.) \qquad (\overline{v}_{i\varkappa}) = \int_{\xi_0}^{\xi} (\alpha_{i\varkappa}(\xi, \eta_0)\, d\xi + \delta_{i\varkappa}) \cdot \int_{\eta_0}^{\eta} (\beta_{i\varkappa}(\xi, \eta)\, d\eta + \delta_{i\varkappa}),$$

so behaupten wir,

---

*) Setzt man $q = x$, so sind die $\lim_m y_\varkappa^{(m)}$, wenn die $a_{i\varkappa}$ im Punkte x stetig sind, nach x differentiierbar und genügen dem System (A.).

**) Das nun folgende wurde am 12. Dezember 1904 in der ungar. Akademie der Wissenschaften vorgetragen (vergl. Mathem. Értesitö, XXIII, S. 102 ff.).

a) daß (v_{iz}), $(\bar{v}_{iz})$ Integralmatrizen des Differentialsystems (B.) sind, d. h. daß die Gleichungen bestehen:

$$(3.) \qquad D_\xi(v_{iz}) = (\alpha_{iz}), \qquad D_\eta(\bar{v}_{iz}) = (\beta_{iz}),$$

$$(4.) \qquad D_\eta(v_{iz}) = (\beta_{iz}), \qquad D_\xi(\bar{v}_{iz}) = (\alpha_{iz});$$

b) daß sich (v_{iz}), $(\bar{v}_{iz})$ für $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ auf die Einheitsmatrix (δ_{iz}) reduzieren;

c) daß (v_{iz}), $(\bar{v}_{iz})$ identisch sind, d. h. daß

$$(5.) \qquad (\bar{v}_{iz})\,(v_{iz})^{-1} = (\delta_{iz}).$$

Die Gleichungen (3.) der Aussage a) folgen unmittelbar aus der Regel (I.) Nr. I, BS, wenn man beachtet, daß der linksseitige Faktor von (v_{iz}) von ξ, der linksseitige Faktor von $(\bar{v}_{iz})$ von η unabhängig ist; für den Beweis der Gleichungen (4.) beschränken wir uns auf die Herleitung der ersten.

Wir schicken zwei einfache Hilfssätze voraus, die auch beim Beweise der Aussage c) zur Anwendung gelangen werden.

Bedeutet $T = (a_{iz})$ eine Matrix, deren Elemente differentiierbare Funktionen der Variabeln x sind, so bezeichnen wir die Matrix

$$\left(\frac{\partial a_{iz}}{\partial x}\right)$$

kurz durch

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(a_{iz}).$$

Es ist also

$$(6.) \qquad D_x T = T^{-1}\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Bedeuten (w_{iz}), (b_{iz}) zwei Matrizen, deren Elemente differentiierbare Funktionen von x sind und deren Determinanten nicht identisch verschwinden, so ist nach den Regeln (III.), (IV.) der Nr. I, BS

$$D_x(w_{iz})\,(b_{iz})\,(w_{iz})^{-1} = (w_{iz})\,(b_{iz})^{-1}\cdot D_x(w_{iz})\cdot(b_{iz})\,(w_{iz})^{-1}$$
$$+ (w_{iz})\cdot D_x(b_{iz})\cdot(w_{iz})^{-1} - (w_{iz})\cdot D_x(w_{iz})\cdot(w_{iz})^{-1},$$

also mit Rücksicht auf (6.)

$$(7.)\quad \frac{\partial}{\partial x}(w_{ix})(b_{ix})(w_{ix})^{-1}=(w_{ix})\left(\mathrm{D}_x(w_{ix})(b_{ix})+\left(\frac{\partial b_{ix}}{\partial x}\right)-(b_{ix})\,\mathrm{D}_x(w_{ix})\right)(w_{ix})^{-1}.\text{*)}$$

Es mögen ferner (w_{ix}), (b_{ix}) zwei Matrizen bedeuten, deren Elemente differentiierbare Funktionen der beiden Variabeln ξ, η und deren Determinanten von Null verschieden sind, so folgt durch Anwendung von (7.)

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(w_{ix})\left((b_{ix})-\mathrm{D}_\eta(w_{ix})\right)(w_{ix})^{-1}=(w_{ix})\left(\mathrm{D}_\xi(w_{ix})(b_{ix})-\mathrm{D}_\xi(w_{ix})\,\mathrm{D}_\eta(w_{ix})\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial b_{ix}}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\mathrm{D}_\eta(w_{ix})-(b_{ix})\,\mathrm{D}_\xi(w_{ix})+\mathrm{D}_\eta(w_{ix})\,\mathrm{D}_\xi(w_{ix})\right)(w_{ix})^{-1}.$$

Da die Matrizen $\mathrm{D}_\xi(w_{ix})$, $\mathrm{D}_\eta(w_{ix})$ offenbar die Integrabilitätsbedingungen (C.), Nr. II, BS erfüllen, also

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\mathrm{D}_\eta(w_{ix})+\mathrm{D}_\xi(w_{ix})\,\mathrm{D}_\eta(w_{ix})=\frac{\partial}{\partial\eta}\mathrm{D}_\xi(w_{ix})+\mathrm{D}_\eta(w_{ix})\,\mathrm{D}_\xi(w_{ix}),$$

so folgt**)

$$(8.)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi}(w_{ix})\left((b_{ix})-\mathrm{D}_\eta(w_{ix})\right)(w_{ix})^{-1}\\&\qquad=(w_{ix})\left(\mathrm{D}_\xi(w_{ix})(b_{ix})+\left(\frac{\partial b_{iz}}{\partial\xi}\right)-(b_{iz})\,\mathrm{D}_\xi(w_{iz})-\frac{\partial}{\partial\eta}\mathrm{D}_\xi(w_{iz})\right)(w_{iz})^{-1}.\end{aligned}\right.$$

Zum Beweise der ersten der Gleichungen (4.) setzen wir nun, wie in Nr. II, BS, Gl. (4.),

$$(w_{ix})=\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\int}}(\alpha_{ix}(\xi,\eta)\,d\xi+\delta_{ix}),$$

dann folgt durch Anwendung von (III.) Nr. I, BS auf (1.)

$$\mathrm{D}_\eta(v_{ix})=(w_{ix})^{-1}\left(\beta_{ix}(\xi_0,\eta)\right)(w_{ix})+\mathrm{D}_\eta(w_{iz}),\text{***)}$$

also ergibt sich aus (8.), wenn wir (β_{ix}) an die Stelle von (b_{ix}) setzen und beachten, daß

$$\mathrm{D}_\xi(w_{ix})=(\alpha_{ix})$$

ist, die Gleichung

---

*) Vergl. *Volterra*, a. a. O. S. 74, 102.
**) Vergl. *Volterra*, a. a. O. S. 68.
***) Gl. (5.) Nr. II, BS.

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(w_{ix})(\beta_{ix}(\xi,\eta)-\mathrm{D}_\eta(w_{ix}))(w_{ix})^{-1}$$
$$=(w_{ix})\Big((\alpha_{ix})(\beta_{ix})+\Big(\frac{\partial\beta_{ix}}{\partial\xi}\Big)-(\beta_{ix})(\alpha_{ix})-\Big(\frac{\partial\alpha_{ix}}{\partial\eta}\Big)\Big)(w_{ix})^{-1},$$

deren rechte Seite jedoch zufolge der Integrabilitätsbedingungen (C.), Nr. II, BS identisch verschwindet. Es ist also (wie BS, S. 270 behauptet wurde) die Matrix ((6.) Nr. II, BS)

$$(w_{ix})(\beta_{ix}(\xi,\eta)-\mathrm{D}_\eta(w_{ix}))(w_{ix})^{-1}$$

von ξ unabhängig, woraus sich, wie BS, S. 271, die erste der Gleichungen (4.) dieser Nummer ergibt.

Da die Richtigkeit der Aussage b) aus den Definitionsgleichungen der Matrizen $(v_{ix}), (\overline{v}_{ix})$ unmittelbar erhellt, so haben wir nur noch die Aussage c) zu erhärten. Dabei setzen wir der Bequemlichkeit wegen in den oberen Grenzen der Integralmatrizen $(v_{ix}), (\overline{v}_{ix})$ ξ_1, η_1 an die Stelle von ξ, η, so daß also die zu beweisende Gleichung (5.) jetzt so lauten soll:*)

(D.)
$$\begin{cases} \overbrace{\int_{\xi_0}^{\xi}}(\alpha_{ix}(\xi,\eta_0)\,d\xi+\delta_{ix})\overbrace{\int_{\eta_0}^{\eta_1}}(\beta_{ix}(\xi_1,\eta)\,d\eta+\delta_{ix}) \\ \overbrace{\int_{\xi_1}^{\xi_0}}(\alpha_{ix}(\xi,\eta)\,d\xi+\delta_{ix})\overbrace{\int_{\eta_1}^{\eta}}(\beta_{ix}(\xi_0,\eta)\,d\eta+\delta_{ix}) \\ =(\delta_{ix}). \end{cases}$$

Wir abstrahieren für einen Augenblick von den Integrabilitätsbedingungen (C.) Nr. II, BS, um eine bemerkenswerte Identität abzuleiten.

Im Innern unseres Rechtecks, dessen Ecken jetzt die Punkte

$$(\xi_0,\eta_0),\ (\xi_1,\eta_0),\ (\xi_1,\eta_1),\ (\xi_0,\eta_1)$$

sind, wählen wir einen beliebigen Punkt (ξ,η) und setzen**)

$$T=\overbrace{\int_{\eta_0}^{\eta}}(\beta_{ix}(\xi_0,\eta)\,d\eta+\delta_{ix})\overbrace{\int_{\xi_0}^{\xi}}(\alpha_{ix}(\xi,\eta)\,d\xi+\delta_{ix}),$$

dann ist

(9.)
$$\mathrm{D}_\xi T=\alpha_{ix}(\xi,\eta)$$

---

*) BS, S. 271 unten.

**) Vergl. *Volterra*, a. a. O. S. 82.

und

$$(10.)\qquad \lim_{\xi=\xi_0} \mathrm{D}_\eta T = \mathrm{D}_\eta(\lim_{\xi=\xi_0} T) = \beta_{i\varkappa}(\xi_0, \eta).^*)$$

Indem wir auf die Matrix

$$(\gamma_{i\varkappa}) = T((\beta_{i\varkappa}) - \mathrm{D}_\eta T)T^{-1}$$

den durch die Gleichung (8.) dargestellten Hilfssatz anwenden, ergibt sich

$$(11.)\quad \Big(\frac{\partial \gamma_{i\varkappa}}{\partial \xi}\Big) = T\Big(\Big(\frac{\partial \beta_{i\varkappa}}{\partial \xi}\Big) + (\alpha_{i\varkappa})(\beta_{i\varkappa}) - \Big(\frac{\partial \alpha_{i\varkappa}}{\partial \eta}\Big) - (\beta_{i\varkappa})(\alpha_{i\varkappa})\Big)T^{-1};$$

ferner bemerken wir, daß nach (10.)

$$(\lim_{\xi=\xi_0} \gamma_{i\varkappa}) = T_{\xi_0}(\beta_{i\varkappa}(\xi_0, \eta) - \lim_{\xi=\xi_0} \mathrm{D}_\eta T)\, T_{\xi_0}^{-1}$$

für jedes η identisch verschwindet, d. h.

$$(12.)\qquad (\lim_{\xi=\xi_0} \gamma_{i\varkappa}) = (0).$$

Wenden wir nunmehr auf die Matrix

$$\overset{\eta_1}{\underset{\eta_0}{\frown\!\!\!\!\!\!\int}} ((\lim_{\xi=\xi_1} \gamma_{i\varkappa})\, d\eta + \delta_{i\varkappa}) = \overset{\eta_1}{\underset{\eta_0}{\frown\!\!\!\!\!\!\int}} ((T(\beta_{i\varkappa}(\xi, \eta) - \mathrm{D}_\eta T)T^{-1})_{\xi=\xi_1}\, d\eta + \delta_{i\varkappa})$$

die Regel (IX.) Nr. I, BS an, so erhalten wir die gesuchte Identität:

$$(13.)\quad \begin{cases} \overset{\eta_1}{\underset{\eta_0}{\frown\!\!\!\!\!\!\int}} ((\lim_{\xi=\xi_1} \gamma_{i\varkappa})\, d\eta + \delta_{i\varkappa}) = \overset{\xi_1}{\underset{\xi_0}{\frown\!\!\!\!\!\!\int}} (\alpha_{i\varkappa}(\xi, \eta)\, d\xi + \delta_{i\varkappa}) \overset{\eta_1}{\underset{\eta_0}{\frown\!\!\!\!\!\!\int}} (\beta_{i\varkappa}(\xi_1, \eta)\, d\eta + \delta_{i\varkappa}) \\ \qquad \times \overset{\xi_0}{\underset{\xi_1}{\frown\!\!\!\!\!\!\int}} (\alpha_{i\varkappa}(\xi, \eta_1)\, d\xi + \delta_{i\varkappa}) \overset{\eta_0}{\underset{\eta_1}{\frown\!\!\!\!\!\!\int}} (\beta_{i\varkappa}(\xi_0, \eta)\, d\eta + \delta_{i\varkappa}). \end{cases}$$

Genügen die $(\alpha_{i\varkappa})$, $(\beta_{i\varkappa})$ den Integrabilitätsbedingungen (C.) Nr. II, BS, so ist, wie oben (erste der Gleichungen (4.)) bewiesen wurde,

$$\mathrm{D}_\eta T = \beta_{i\varkappa}(\xi, \eta),$$

die Matrix $(\gamma_{i\varkappa})$ folglich identisch (d. h. für jedes Wertesystem ξ, η) gleich Null. Die Identität (13.) liefert also in diesem Falle unmittelbar die zu

*) Da die Integrabilitätsbedingungen nicht vorausgesetzt werden, ist $\mathrm{D}_\eta T$ nicht für jedes ξ gleich $\beta_{i\varkappa}(\xi, \eta)$!

erweisende Gleichung (D.), d. h. den „*Rechteckssatz*“, den wir jetzt so aussprechen wollen:

Sind (α_{ix}), (β_{ix}) *innerhalb des einfach zusammenhängenden Bereiches* S *eindeutige und stetig differentiierbare Funktionen von* ξ, η, *die den Integrabilitätsbedingungen* (C.), Nr. II, BS *genügen, und liegt das Rechteck* (ξ_0, η_0), (ξ_1, η_0), (ξ_1, η_1), (ξ_0, η_1) *ganz im Innern von* S, *so ist die längs der Begrenzung dieses Rechtecks im positiven Sinne erstreckte Integralmatrix*

$$\widetilde{\int} (\alpha_{ix}(\xi, \eta) d\xi + \beta_{ix}(\xi, \eta) d\eta + \delta_{ix})$$

gleich der Einheitsmatrix (δ_{ix}).*)

Aus dem „Rechteckssatze“ folgt nun, wie BS S. 271 angedeutet wurde, die Existenz einer innerhalb S eindeutig bestimmten Integralmatrix (v_{ix}), die sich für $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ auf (δ_{ix}) reduziert. Die genauere Ausführung dieses Beweises gestaltet sich wie folgt.

Zwischen (ξ_0, η_0) und einem beliebigen Punkte (ξ, η) von S lassen sich stets Punkte $(\xi_1, \eta_1), \ldots (\xi_m, \eta_m)$ in endlicher Anzahl so einschalten, daß für irgend zwei auf einander folgende der $m+2$ Punkte

$$\text{(a.)} \qquad (\xi_0, \eta_0),\ (\xi_1, \eta_1), \ldots (\xi_m, \eta_m),\ (\xi_{m+1} = \xi, \eta_{m+1} = \eta)$$

entweder die „obere Stufe“

$$(\xi_{\lambda-1}, \eta_{\lambda-1}) \ldots (\xi_{\lambda-1}, \eta_\lambda) \quad \text{und} \quad (\xi_{\lambda-1}, \eta_\lambda) \ldots (\xi_\lambda, \eta_\lambda)$$

oder die „untere Stufe“

$$(\xi_{\lambda-1}, \eta_{\lambda-1}) \ldots (\xi_\lambda, \eta_{\lambda-1}) \quad \text{und} \quad (\xi_\lambda, \eta_{\lambda-1}) \ldots (\xi_\lambda, \eta_\lambda)$$

oder beide zugleich ganz innerhalb S verlaufen. Bilden wir für die innerhalb S verlaufenden Stufen der durch die Punkte (a.) bestimmten „Treppenlinie“ die Matrizen

$$\text{(o.)} \qquad \left\{ \widetilde{\int_{\eta_{\lambda-1}}^{\eta_\lambda}} (\beta_{ix}(\xi_{\lambda-1}, \eta) d\eta + \delta_{ix}) \widetilde{\int_{\xi_{\lambda-1}}^{\xi_\lambda}} (\alpha_{ix}(\xi, \eta_\lambda) d\xi + \delta_{ix}) \right.$$

*) Die Anwendung des bei dem obigen Beweise befolgten Gedankenganges auf das Integral eines totalen Differentials $P d\xi + Q d\eta$, wo $\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}$, liefert für den von meinem Freunde *Heffter* unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über P, Q bewiesenen „Rechteckssatz“ der gewöhnlichen Integralrechnung den Beweis, den ich im Bande VII (1905) der Zeitschrift „l'Enseignement mathématique“ veröffentlicht habe.

beziehungsweise

$$\text{(u.)} \qquad \left\{ \int_{\xi_{\lambda-1}}^{\xi_\lambda} (\alpha_{i\varkappa}(\xi, \eta_{\lambda-1})\, d\xi + \delta_{i\varkappa}) \int_{\eta_{\lambda-1}}^{\eta_\lambda} (\beta_{i\varkappa}(\xi_\lambda, \eta)\, d\eta + \delta_{i\varkappa}), \right.$$

die wir durch $(v_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ bezeichnen,*) so genügt die Matrix

$$\text{(I.)} \qquad (v_{i\varkappa}) = (v_{i\varkappa}^{(1)})(v_{i\varkappa}^{(2)}) \dots (v_{i\varkappa}^{(m+1)})$$

offenbar dem Differentialsysteme (B.), Nr. II, BS und reduziert sich für $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ auf $(\delta_{i\varkappa})$. Um zu zeigen, daß $(v_{i\varkappa})$ innerhalb S eindeutig bestimmt sei, hat man nur nachzuweisen, daß $(v_{i\varkappa})$ von der Wahl der eingeschalteten Punkte unabhängig ist. Denken wir uns aber die Punkte (ξ_0, η_0), (ξ, η) durch Einschaltung anderer Punkte, durch eine neue Treppenlinie verbunden, so kann das zwischen den beiden Treppenlinien gelegene Gebiet von S in eine endliche Anzahl von Rechtecken zerlegt werden, deren Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind. Wir können dann die in bezug auf beide Treppenlinien gebildeten Matrizen (I.) in der Form

$$(v_{i\varkappa}) = (v_{i\varkappa}^{(1)})(v_{i\varkappa}^{(2)}) \dots (v_{i\varkappa}^{(m+1)}),$$
$$(\bar{v}_{i\varkappa}) = (\bar{v}_{i\varkappa}^{(1)})(\bar{v}_{i\varkappa}^{(2)}) \dots (\bar{v}_{i\varkappa}^{(m+1)})$$

schreiben, wo sich die nicht überstrichenen Buchstaben auf die eine, die überstrichenen auf die andere Treppe beziehen, und wo im Sinne des Rechteckssatzes stets

$$\text{(II.)} \qquad (v_{i\varkappa}^{(\lambda)})(\bar{v}_{i\varkappa}^{(\lambda)})^{-1} = (\delta_{i\varkappa})$$

ist. Hieraus folgt aber unmittelbar die zu beweisende Gleichung

$$(v_{i\varkappa})(\bar{v}_{i\varkappa})^{-1} = (\delta_{i\varkappa}).$$

*) Liegen für ein Paar konsekutiver Punkte *beide* Stufen innerhalb S, so sind die beiden Matrizen (o.), (u.) nach dem Rechteckssatze identisch.

Über Stabilität und Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel.

Von Herrn *Leopold Fejér* in Klausenburg.*)

Bekanntlich entscheidet über die Stabilität oder Labilität der Gleichgewichtslage eines freien materiellen Punktes in den meisten Fällen einfach das Verhalten der Potentialfunktion in der Nähe der Gleichgewichtslage.

1. Nach dem berühmten Satze von *Lagrange und Dirichlet* ist die Gleichgewichtslage G des freien materiellen Punktes P mit der Masse 1 *stabil*, wenn die Potentialfunktion $U(x, y, z)$ im Punkte G ein *isoliertes Maximum* hat. Schlagen wir in diesem Falle um G als Zentrum zwei genügend kleine, aber sonst beliebige Kugeln mit den Radien

$$R_1, R_2 \qquad (R_1 < R_2),$$

so können wir folgendes behaupten:

Gelangt während seiner Bewegung der materielle Punkt P zu einer Zeit t_0 einmal in das Innere der kleineren Kugel R_1,**) so bleibt der Punkt nicht nur zu jeder *späteren Zeit* im Innern der größeren Kugel R_2, sondern er war auch zu jeder *früheren Zeit* t im Innern der Kugel R_2 — vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit für $t = t_0$ kleiner ist als eine von R_1, R_2 abhängende Größe. Im Falle des isolierten Maximums ist also, wie wir sagen wollen, „Stabilität in bezug auf die Zukunft“ und „Stabilität in bezug auf die Vergangenheit“ vorhanden.

*) Vorgetragen auf der Naturforscherversammlung zu Meran. 1905.

**) Wir bezeichnen eine Kugel mit demselben Buchstaben wie ihren Radius.

2. Mit der Frage der Stabilität bzw. Labilität in den übrigen Fällen beschäftigen sich die Arbeiten der Herrn *Kneser*, *Liapounoff*, *Hadamard*, *Painlevé*, *Hamel*, *Bohl*. Sie gestatten jedenfalls — es ist dies ihr elementarstes Ergebnis — an die Seite des *Lagrange-Dirichlet*schen Stabilitätssatzes den folgenden Labilitätssatz zu stellen:

Hat die Potentialfunktion im Punkte G des Gleichgewichts ein isoliertes Minimum und wird das Vorhandensein des Minimums durch die Glieder niedrigster Ordnung der *Taylor*schen Reihe erkannt, so ist die Gleichgewichtslage *labil*. D. h. wenn wir um G als Zentrum eine kleine Kugel mit dem Radius R schlagen, so können wir im genannten Falle folgendes behaupten:

Befindet sich P an irgend einer Stelle im Innern der Kugel R, so können wir dem Punkte P eine der *Größe* nach *beliebig kleine* Anfangsgeschwindigkeit *so* erteilen, daß P zu einer späteren Zeit t das Innere der Kugel notwendig verläßt.

Im folgenden werden wir zwei Sätze mitteilen, die den angeführten in *dem* Falle entsprechen, wo die Bewegung in einem *widerstrebenden Mittel* vor sich geht.

Die Bewegungen sind in diesem Falle durch den Ansatz

$$(1.)\qquad \begin{cases} x'' = \dfrac{\partial U}{\partial x} - f(v)\dfrac{x'}{v}, \\ y'' = \dfrac{\partial U}{\partial y} - f(v)\dfrac{y'}{v}, \\ z'' = \dfrac{\partial U}{\partial z} - f(v)\dfrac{z'}{v} \end{cases}$$

definiert. Es ist bekannt, daß wenn man eine vorläufige Orientierung in bezug auf den Verlauf oder sogar Endverlauf der Bewegungen im widerstrebenden Mittel sucht, dies nicht leicht durch Vergleich mit der „Bewegung ohne Widerstand“ geschieht. Dies liegt daran, daß die den Widerstand vertretende Kraft

$$\left(-f(v)\frac{x'}{v},\quad -f(v)\frac{y'}{v},\quad -f(v)\frac{z'}{v}\right)$$

nicht dem Geschwindigkeitsvektor der widerstandslosen Bewegung, sondern der momentanen Geschwindigkeit der zu studierenden Bewegung *mit* Wider-

stand entgegengerichtet ist — eine Geschwindigkeitsrichtung die sozusagen nicht *explizite*, sondern erst durch die Gleichungen (1.) *implizite* bestimmt ist.

Es lassen sich nun folgende, ganz bestimmte Sätze formulieren.

I. *Besitzt die Potentialfunktion im Gleichgewichtspunkte G ein isoliertes Maximum, so findet Stabilität für die Zukunft statt, während in bezug auf die Vergangenheit Labilität vorhanden sein kann.*

Multiplizieren wir nämlich die Gleichungen (1.) der Reihe nach mit x', y', z', addieren sie und integrieren von t_0 bis t, so erhalten wir die bekannte Gleichung:

$$(A.) \qquad \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{2} + \int_{t_0}^{t} f(v)v\,dt = U+h,$$

die der Gleichung der lebendigen Kraft der widerstandslosen Bewegung entspricht. Beobachten wir nun die Lage des Punktes x, y, z für eine Zeit $t > t_0$, so können wir behaupten, daß

$$(2.) \qquad U(x, y, z)+h > 0.$$

Denn auf der linken Seite der Gleichung (A.) ist das erste Glied gewiß $\geqq 0$. Das zweite Glied ist positiv, da v die positive Quadratwurzel von $x'^2+y'^2+z'^2$ ist und $f(v)$ als *Widerstandsfunktion* folgende Eigenschaften besitzt:

$$(3.) \qquad \begin{cases} f(v)=0 & \text{für } v=0, \\ f(v)>0 & \text{für } v>0, \\ f(v) & \text{wächst mit } v \text{ monoton.} \end{cases}$$

Aus Ungleichung (2.) kann man aber in *Dirichlet*scher Weise weiterschließen, daß in der Tat Stabilität für die Zukunft vorhanden ist — daß also unter den genannten Bedingungen, wenn $t > t_0$ ist, P stets innerhalb der Kugel R_2 bleibt.

Ist dagegen $t < t_0$, so ist das Integral in der Gleichung (A) *negativ*. Man kann also für $t < t_0$ *nicht* behaupten, daß $U+h>0$. Daß für $t<t_0$ in der Tat Labilität auftreten kann, zeigt schon der Fall der *gewöhnlichen gedämpften Schwingungen*.

Aus Gleichung $(A.)$ läßt sich noch ein weiterer Schluß in bezug auf die Bewegung ziehen. Da nämlich für $t > t_0$ der Punkt stets innerhalb der Kugel R_2 bleibt, so muß jeder der beiden positiven Summanden der linken Seite von $(A.)$ stets *unterhalb* einer endlichen Grenze liegen. Nun kann

infolge der Eigenschaften (3.) der Funktion $f(v)$ das Integral

$$\int_{t_0}^{t} f(v)\, v\, dt$$

nur dann unterhalb einer endlichen Grenze bleiben, wenn *v beliebig oft beliebig klein* wird. Die bekannte Eigenschaft der gewöhnlichen gedämpften Schwingungsbewegung um ihre Gleichgewichtslage, nach welcher ihre Geschwindigkeit beliebig oft beliebig klein wird, ist also für ein beliebiges Potential und beliebige Widerstandsfunktion erweitert. — Ich bemerke noch, daß bekanntlich diese Eigenschaft bei Bewegung ohne Widerstand *nicht* zu bestehen braucht, wie dies etwa die gewöhnliche Schwingung ohne Widerstand

$$x = \varepsilon \cos t,$$

$$y = \varepsilon \sin t$$

zeigt, wo die Geschwindigkeit konstant ist.*)

II. Interessanter ist aber die Untersuchung des Falles, wo das Potential in der Gleichgewichtslage ein isoliertes *Minimum* besitzt, welches durch die Glieder niedrigster Dimension der *Taylor*schen Reihe zum Vorschein kommt.

Wenn kein Widerstand vorhanden ist, so ist die Gleichgewichtslage labil. Indem wir uns nun die mechanische Wirkung des Widerstandes vor Augen halten, werden wir schon von vornherein die heuristische Aussage machen können, daß der Widerstand die Chancen der Labilität *verringere*. Man kann nun zeigen, daß *wenn*

$$\frac{f(v)}{v}$$

für kleine Werte von v unterhalb einer endlichen Grenze M bleibt, die Gleichgewichtslage eine labile ist. Wird also $f(v)$ so *stark* 0 wie eine Potenz v^α, wo $\alpha \geqq 1$ ist — die am meisten gebräuchlichen Fälle $\alpha = 1, 2$ gehören hierher — so ist die Labilität der Gleichgewichtslage noch gesichert. Ist dagegen das Maß des Unendlichkleinwerdens für $f(v)$ gleich v^α, wo $0 < \alpha < 1$ ist, d. h. ist der Widerstand — wenigstens im Verhältnis zu dem Widerstande im Falle $\alpha \geqq 1$ — für kleine Werte von *v groß*, so kann ich mit

*) Diese Sätze habe ich schon in meinem an der Klausenburger Universität gehaltenen Habilitationsvortrage erörtert.

der darzulegenden Methode die Labilität des Gleichgewichtes nicht erweisen. Ob in diesem Falle der Widerstand die Labilität vollständig aufheben kann oder nicht, muß noch dahingestellt bleiben.

Es sei die Gleichgewichtslage im Koordinatenanfangspunkte. Um die Labilität zu erweisen ist es natürlich, die zeitliche Änderung der Ortsfunktion

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

zu untersuchen. Wir haben

$$(r^2)' = 2(xx' + yy' + zz')$$

und

$$\left(\frac{r^2}{4}\right)'' = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2} + \frac{xx'' + yy'' + zz''}{2}.$$

Wenn wir x'', y'', z'' aus Gleichung (1.) entnehmen, so erhalten wir

$$\left(\frac{r^2}{4}\right)'' = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2} + \frac{x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z}}{2} - \frac{f(v)}{v}\,\frac{xx' + yy' + zz'}{2}.$$

Da aber

$$\frac{xx' + yy' + zz'}{2} = \left(\frac{r^2}{4}\right)',$$

so erhalten wir, wenn wir

$$p = \frac{f(v)}{v},$$

$$q = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2} + \frac{x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z}}{2}$$

setzen,

$$\text{(B.)} \qquad \left(\frac{r^2}{4}\right)'' + p\left(\frac{r^2}{4}\right)' = q.$$

Es sei nun

$$U = U_{2n} + U_{2n+1} + \cdots$$

die *Taylor*sche Entwicklung von U für die Umgebung von $x=0$, $y=0$, $z=0$. Hier bedeutet U_{2n}, nach Voraussetzung, eine homogene positivdefinite Form $2n$-ten Grades von x, y, z. Folglich erhalten wir

$$\text{(4.)} \qquad q = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2} + n\,U_{2n} + \cdots.$$

Aus dieser Form von q folgt, daß wir um O eine Kugel vom Radius R schlagen können, so daß q stets positiv bleibt, so lange der Punkt sich innerhalb oder an der Grenze der Kugel aufhält. Die einzige Ausnahme bildet der Fall, wo der Punkt sich in O selbst befindet und die Geschwindigkeit zugleich den Wert Null hat — also der Fall der Ruhe in der Gleichgewichtslage. Wir behaupten nun folgendes:

Befindet sich P in einem beliebigen Punkte P_0 innerhalb der so einmal für allemal bestimmten Kugel und geben wir dem Punkte P eine Anfangsgeschwindigkeit *in der Richtung* $\overrightarrow{OP_0}$, die der Größe nach noch so *klein* sein mag — so überschreitet der Punkt P nach Ablauf einer endlichen Zeit notwendig die Grenze der Kugel mit dem Radius R.

Aus Gleichung (B.) folgt, wenn wir sie als lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung für $\left(\frac{r^2}{4}\right)'$ auffassen,

$$\left(\frac{r^2}{4}\right)' = \frac{\int_0^t q e^{\int_0^t p dt} dt}{e^{\int_0^t p dt}} + \frac{\left(\frac{r^2}{4}\right)'_0}{e^{\int_0^t p dt}}. \tag{5.}$$

Die Zeit $t=0$ entspricht der Anfangslage; $\left(\frac{r^2}{4}\right)'_0$ bedeutet die Ableitung von $\frac{r^2}{4}$ nach t zur Zeit $t=0$, eine Größe, die nach Voraussetzung, wenn auch noch so klein, jedoch *positiv* ist.

Wir behaupten zunächst, daß die Geschwindigkeit v (die also für $t=0$ von Null verschieden sein soll) während der Bewegung innerhalb der Kugel R nicht nach Null konvergieren kann, wenn t nach einem endlichen Zeitwert $t=\bar{t}$ konvergiert, — so daß also die Formel (5.) ohne Bedenken für jedes positive t anwendbar ist.

Würde nämlich für $t=\bar{t}$

$$\lim_{t=\bar{t}} v = 0$$

sein, so ergibt sich, da

$$\limsup_{v=+0} \frac{f(v)}{v}$$

eine endliche, nicht negative Größe ist, der Widerspruch, daß die rechte Seite der Gleichung (5.) bei dem Grenzübergange $\lim t=\bar{t}$ nach einer ganz bestimmten

positiven Größe, — die linke Seite

$$\frac{xx'+yy'+zz'}{2}$$

aber nach Null konvergiert.

Die Formel (5.) ist also für jedes positive t gültig.

Aus ihr ergibt sich dann zunächst, daß $\left(\frac{r^2}{4}\right)'$ stets positiv ist, — daß also der Punkt P sich von der Gleichgewichtslage stets *entfernt*. Um aber mit Bestimmtheit behaupten zu können, daß P die Oberfläche der Kugel notwendig überschreitet und sich ihr nicht etwa nur asymptotisch nähert, wollen wir zeigen, daß $\left(\frac{r^2}{4}\right)'$ nicht nur positiv bleibt für jedes t, sondern auch stets oberhalb einer positiven unteren Grenze liegt.

Für $t=0$ ist $\left(\frac{r^2}{4}\right)'$ nach Voraussetzung positiv. Für ein *endliches* t kann, wie schon gezeigt, $\left(\frac{r^2}{4}\right)'$ nicht verschwinden. Wir müssen also bloß zeigen, daß $\left(\frac{r^2}{4}\right)'$ für *große* Werte von t oberhalb einer endlichen Grenze liegt. — Zunächst ist klar, daß P sich immer außerhalb der Kugel mit dem Radius $\overline{OP}$ befindet. Solange sich aber der Punkt zwischen dieser Kugel und der Kugel mit dem Radius R bewegt, liegt q, wegen Gleichung (4.), *oberhalb* einer positiven unteren Grenze ε. Folglich ist

$$\left(\frac{r^2}{4}\right)' > \varepsilon \frac{\int_0^t e^{\int_0^t p\,dt}\,dt}{e^{\int_0^t p\,dt}}, \tag{6.}$$

und wir haben bloß zu zeigen, daß der rechtsstehende Quotient für große Werte von t oberhalb einer positiven unteren Grenze bleibt. Zu diesem Zwecke führen wir

$$\tau = e^{\int_0^t p\,dt}$$

als neue Integrationsvariable ein. Dies ist gestattet, da τ von 1 an monoton wächst, wenn t von 0 aus monoton wächst. Nun ist

$$\left(\frac{r^2}{4}\right)' > \varepsilon \cdot \frac{1}{\tau} \int_1^\tau \frac{d\tau}{p},$$

und da $p = \frac{f(v)}{v}$ für die v-Werte, die in Betracht kommen, nach Voraussetzung unterhalb einer positiven oberen Grenze M liegt,*)

$$\left(\frac{r^2}{4}\right)' > \frac{\varepsilon}{M}\,\frac{\tau-1}{\tau} = \frac{\varepsilon}{M}\left(1-\frac{1}{\tau}\right).$$

Ist nun $t > a$, wo a positiv ist, so ist stets $\tau > 1 + \alpha$, wo α ebenfalls eine positive Konstante bedeutet.

Damit ist aber die Labilität schon erwiesen.

Die dargelegte Methode stützt sich wesentlich auf Gleichung (B.). Diese ist einer berühmten Gleichung nachgebildet, die *Jacobi* in seiner Dynamik für die Bewegung ohne Widerstand gibt und ebenfalls zu Stabilitätsuntersuchungen benutzt.

Wir bemerken noch schließlich, daß die Methode auch in einem von Herrn *Painlevé***) betrachteten Falle zum Ziele führt, wenn wir daselbst die Bewegung in einem widerstrebenden Mittel sich abspielen lassen.

---

*) Bleibt p für positive t nicht unterhalb einer endlichen Grenze, so kann der auf der rechten Seite der Ungleichung (6.) auftretende Quotient *gegen Null konvergieren*, wie das Beispiel $p(t) = 3$ für $0 \leqq t \leqq 1$, $p(t) = \frac{1}{t} + 2t$ für $1 < t < +\infty$ zeigt.

**) *Painlevé*, Comptes rendus, I. 125, 1897, S. 1021.

Bewegungen in der Nähe einer Gleichgewichtslage.

Von Herrn *J. Horn* in Klausthal.

Der vorliegende Aufsatz schließt sich an den zweiten Teil der im 126. Bande dieses Journals erschienenen Arbeit des Verfassers „Bewegungen in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage“ an. Das a. a. O., S. 194 beschriebene mechanische System wird durch ein allgemeineres ersetzt.

Die Lage eines Systems von n Freiheitsgraden mit von der Zeit t unabhängigen Verbindungen sei durch die n Hauptkoordinaten $x_1, \dots x_n$ bestimmt. In der Gleichgewichtslage O sei $x_1 = 0, \dots x_n = 0$. Die Kräftefunktion U sei in der Umgebung von O in eine Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ entwickelbar:

$$U = \sum_{p=2}^{x} U_p ;$$

U_p sei eine ganze homogene Funktion p-ten Grades von $x_1, \dots x_n$ und insbesondere

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} s_\alpha x_\alpha^2 ,$$

wo

$$s_i = -\lambda_i^2 \qquad (i = 1, \dots m),$$
$$s_j = \mu_j^2 \qquad (j = m+1, \dots n)$$

ist und $\lambda_1, \dots \lambda_m$; $\mu_{m+1}, \dots \mu_n$ reelle positive (von Null verschiedene) Größen sind. Die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots n)$$

ist eine ganze homogene Funktion zweiten Grades der n Größen

$$x'_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt} , \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

deren Koeffizienten $A_{\alpha\beta}$ in Potenzreihen von $x_1, \ldots x_n$ entwickelbar sind; für $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ ist

$$A_{\alpha\alpha} = 1, \quad A_{\alpha\beta} = 0, \quad (\alpha \gtrless \beta).$$

Die *Lagrange*schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

erhalten durch Auflösung nach

$$x''_\alpha = \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

die Gestalt

$$\text{(A.)} \qquad x''_\alpha - s_\alpha x_\alpha = F_\alpha(x'_1, \ldots x'_n; x_1, \ldots x_n) + G_\alpha(x_1, \ldots x_n), \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

wo F_α eine ganze homogene Funktion zweiten Grades von $x'_1, \ldots x'_n$ ist, deren Koeffizienten Potenzreihen von $x_1, \ldots x_n$ sind, und G_α eine mit quadratischen Gliedern beginnende Potenzreihe von $x_1, \ldots x_n$.

Der Fall $m = n$, in welchem O eine stabile Gleichgewichtslage ist, wurde in der oben erwähnten Arbeit im 126. Bande dieses Journals betrachtet.*)

Im Falle $m = 0$ werden die Gleichungen (A.) durch konvergente Potenzreihen von

$$k_1 e^{-\mu_1 t}, \ldots k_n e^{-\mu_n t}$$

befriedigt, wo $k_1, \ldots k_n$ Integrationskonstante sind.**) Untersuchungen über die Existenz und Mannigfaltigkeit der in der Nähe einer labilen Gleichgewichtslage verlaufenden Bewegungen wurden von *Kneser*, *Bohl* und *Karstens* angestellt.***)

Wir nehmen jetzt $0 \leqq m \leqq n$ an und zeigen, daß die Gleichungen (A.) formell befriedigt werden, wenn man für die Koordinaten $x_1, \ldots x_n$ gewisse

---

*) Vergl. *Poincaré*, Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, Bd. II, S. 160—165, 190—193 und die Fußnote im 126. Bande dieses Journals, S. 220—221.

**) Vergl. *Picard*, Traité d'Analyse, Bd. III, S. 185—186.

***) *Kneser*, Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen (Bd. 115 und 118 dieses Journals). — *Bohl*, Über gewisse Differentialgleichungen allgemeinen Charakters, welche in der Mechanik Anwendung finden; Doktordissertation Dorpat 1900 (mir unverständlich, weil in russischer Sprache geschrieben). — *Karstens*, Über gewisse asymptotische Lösungen der Differentialgleichungen der Mechanik; Dissertation Berlin 1901.

Reihen mit $n+m$ Konstanten und mit trigonometrischen und Exponentialfunktionen der Zeit t setzt.*) Wir begnügen uns vorerst mit der formalen Berechnung dieser Reihen, deren Konvergenz im allgemeinen durch das Auftreten kleiner Divisoren in Frage gestellt wird. Es ist namentlich seit den Untersuchungen *Poincarés* bekannt, daß auch divergenten Reihen eine Bedeutung zukommt.**) Die Aufgabe, die Bedeutung unserer Reihen genauer zu untersuchen und die Reihen zur angenäherten Darstellung der Bewegungen zu benutzen, bleibt noch zu behandeln.

In einer im 127. Bande dieses Journals erschienenen Abhandlung von *Bohl* „Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage“ ist unter etwas allgemeineren Voraussetzungen***) die folgende Aufgabe gelöst: „Es soll die Existenz und Mannigfaltigkeit derjenigen Bewegungen festgestellt werden, welche für einen wenigstens einseitig unbegrenzten Zeitraum in der Nähe der Gleichgewichtslage verlaufen.“ Es ist interessant, die Resultate *Bohls*, welche in Bd. 127, S. 181—182 dieses Journals zusammengestellt sind, mit den in der vorliegenden Arbeit formal abgeleiteten Reihen zu vergleichen.

§ 1.

Wir zeigen, daß *die Differentialgleichungen* (A.) *formell befriedigt werden, wenn man für* x_α *eine Reihe*

$$x_\alpha = x_\alpha^{(1)} + x_\alpha^{(2)} + \cdots + x_\alpha^{(p)} + \cdots \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

setzt: darin ist $x_\alpha^{(p)}$ *eine ganze homogene Funktion p-ten Grades von n Integrationskonstanten* $k_1, \ldots k_n$ *und eine aus trigonometrischen und Exponentialausdrücken zusammengesetzte Funktion von n Argumenten*

$$u_1, \ldots u_m;\ v_{m+1} \cdots v_n;$$

es ist

$$u_i = \varrho_i t + l_i, \qquad (i = 1, \ldots m)$$

$$v_j = \sigma_j t; \qquad (j = m+1, \ldots n)$$

*) Dabei sind gewisse Relationen zwischen den λ und μ ausgeschlossen.

**) Vergl. *Poincaré*, Méth. nouv., Bd. II, insbesondere Kapitel 8, in betreff verwandter Reihen.

***) Bei *Bohl* werden nämlich U und die Koeffizienten von T nicht als analytische Funktionen vorausgesetzt.

$l_1, \dots l_m$ *sind weitere Integrationskonstante und*

$$\varrho_i = \lambda_i + \varrho_i^{(2)} + \varrho_i^{(4)} + \cdots, \qquad (i = 1, \dots m)$$

$$\sigma_j = \mu_j + \sigma_j^{(2)} + \sigma_j^{(4)} + \cdots, \qquad (j = m+1, \dots n)$$

wo $\varrho_i^{(2)}$, $\sigma_j^{(2)}$ *ganze homogene Funktionen ersten Grades,* $\varrho_i^{(4)}$, $\sigma_j^{(4)}$ *ganze homogene Funktionen zweiten Grades usw. der m Größen* $k_1^2, \dots k_m^2$ *sind.*

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Größen $\lambda_1, \dots \lambda_m$; $\mu_{m+1}, \dots \mu_n$ gewisse, in § 2 anzugebende Bedingungen erfüllen.

Zum Beweise*) führen wir die Gleichungen (A.), indem wir

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \sum_i \varrho_i \frac{\partial x_\alpha}{\partial u_i} + \sum_j \sigma_j \frac{\partial x_\alpha}{\partial v_j}, \qquad (i = 1, \dots m;\ j = m+1, \dots n)$$

$$\frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = \sum_{ii'} \varrho_i \varrho_{i'} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial u_i \partial u_{i'}} + \sum_{jj'} \sigma_j \sigma_{j'} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial v_j \partial v_{j'}} + \sum_{ij} \varrho_i \sigma_j \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial u_i \partial v_j}$$
$$(i, i' = 1, \dots m;\ j, j' = m+1, \dots n)$$

setzen, über in

$$\sum_{ii'} \varrho_i \varrho_{i'} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial u_i \partial u_{i'}} + \sum_{jj'} \sigma_j \sigma_{j'} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial v_j \partial v_{j'}} + \sum_{ij} \varrho_i \sigma_j \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial u_i \partial v_j} - s_\alpha x_\alpha$$
$$= F_\alpha\left(\sum_i \varrho_i \frac{\partial x_1}{\partial u_i} + \sum_j \sigma_j \frac{\partial x_1}{\partial v_j}, \dots;\ x_1, \dots\right) + G_\alpha(x_1, \dots).$$

Wir setzen die obigen Reihen für $x_1, \dots x_n$ und für $\varrho_1, \dots \varrho_m$; $\sigma_{m+1}, \dots \sigma_n$ ein und vergleichen die Glieder 1., ... p-ten Grades in bezug auf $k_1, \dots k_n$. Zunächst erhält man die Gleichungen

$$\sum_{ii'} \lambda_i \lambda_{i'} \frac{\partial^2 x_\alpha^{(1)}}{\partial u_i \partial u_{i'}} + \sum_{jj'} \mu_j \mu_{j'} \frac{\partial^2 x_\alpha^{(1)}}{\partial v_j \partial v_{j'}} + \sum_{ij} \lambda_i \mu_j \frac{\partial^2 x_\alpha^{(1)}}{\partial u_i \partial v_j} - s_\alpha x_\alpha^{(1)} = 0;$$

sie werden befriedigt durch

$$x_i^{(1)} = k_i \cos u_i, \qquad (i = 1, \dots m)$$

$$x_j^{(1)} = k_j e^{-v_j}. \qquad (j = m+1, \dots n)$$

Wir zeigen, *daß allgemein*

$$x_\alpha^{(p)} = \Sigma k_1^{p_1} \dots k_n^{p_n} e^{-p_{m+1} v_{m+1} - \cdots - p_n v_n} \cdot [A \cos(q_1 u_1 + \cdots + q_m u_m) + B \sin(q_1 u_1 + \cdots + q_m u_m)]$$

*) Vergl. dieses Journal Bd. 126, S. 221 ff.

ist: in jedem Gliede der Summe sind $p_1, \dots p_n$ *positive ganze Zahlen, welche die Bedingung*

$$p_1 + \cdots + p_n = p$$

erfüllen: $q_1, \dots q_m$ *sind positive oder negative ganze Zahlen, welche der Bedingung*

$$|q_i| = p_i - 2g_i \qquad (i = 1, \dots m)$$

(g_i *ganze positive Zahl einschl. Null*) *genügen; in einem von* $v_{m+1}, \dots v_n$ *freien Gliede tritt kein Sinus auf, d. h. wenn* $p_1 + \cdots + p_m = p$ *ist, ist* $B = 0$.

Setzt man

$$x'_\alpha = y_\alpha^{(1)} + y_\alpha^{(2)} + \cdots + y_\alpha^{(p)} + \cdots, \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

wo $y_\alpha^{(p)}$ eine ganze homogene Funktion p-ten Grades von $k_1, \dots k_n$ darstellt, so ist

$$y_i^{(1)} = -k_i \lambda_i \sin u_i, \qquad (i = 1, \dots m)$$

$$y_j^{(1)} = -k_j \mu_j e^{-v_j}. \qquad (j = m+1, \dots n)$$

Aus dem für $x_\alpha^{(p)}$ angeschriebenen Ausdruck ergibt sich für $y_\alpha^{(p)}$ ein Ausdruck von derselben Form; es tritt nur jetzt in einem von $v_{m+1}, \dots v_n$ freien Gliede kein Kosinus auf.

Das Produkt mehrerer Ausdrücke von der für $x_\alpha^{(p)}$ angenommenen Form ist ein Ausdruck von derselben Form. Dasselbe gilt für ein derartiges Produkt, in welchem zwei Faktoren $x_{\alpha'}^{(p')}$, $x_{\alpha''}^{(p'')}$ durch $y_{\alpha'}^{(p')}$, $y_{\alpha''}^{(p'')}$ ersetzt sind; ferner für ein solches Produkt, welches noch mit einer ganzen rationalen Funktion von $k_1^2, \dots k_m^2$ multipliziert ist, sowie für das Produkt aus einer der Ableitungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 x_\alpha^{(p)}}{\partial u_i \partial u_{i'}}, \qquad \frac{\partial^2 x_\alpha^{(p)}}{\partial v_j \partial v_{j'}}, \qquad \frac{\partial^2 x_\alpha^{(p)}}{\partial u_i \partial v_j}$$

und einer ganzen rationalen Funktion von $k_1^2, \dots k_m^2$.

Wir zeigen, daß das für $x_\alpha^{(p)}$ angegebene Bildungsgesetz richtig ist, wenn die Gültigkeit des entsprechenden Gesetzes für $x_\alpha^{(1)}, \dots x_\alpha^{(p-1)}$ vorausgesetzt wird. Für den Fall eines ungeraden p berechnen wir $\varrho_i^{(p-1)}$, $\sigma_j^{(p-1)}$ unter der Voraussetzung, daß die Größen $\varrho_i^{(r)}$, $\sigma_j^{(r)}$ $(r < p-1)$ bekannt sind.

Für $x_\alpha^{(p)}$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$\sum_{ii'} \lambda_i \lambda_{i'} \frac{\partial^2 x_\alpha^{(p)}}{\partial u_i \partial u_{i'}} + \sum_{jj'} \mu_j \mu_{j'} \frac{\partial^2 x_\alpha^{(p)}}{\partial v_j \partial v_{j'}} + \sum_{ij} \lambda_i \mu_j \frac{\partial^2 x_\alpha^{(p)}}{\partial u_i \partial v_i} - s_\alpha x_\alpha^{(p)}$$

$$+ \sum_{ii'} (\lambda_i \varrho_{i'}^{(2)} + \lambda_{i'} \varrho_i^{(2)}) \frac{\partial^2 x_\alpha^{(p-2)}}{\partial u_i \partial u_{i'}}$$

$$+ \sum_{jj'} (\mu_j \sigma_{j'}^{(2)} + \mu_{j'} \sigma_j^{(2)}) \frac{\partial^2 x_\alpha^{(p-2)}}{\partial v_j \partial v_{j'}}$$

$$+ \sum_{ij} (\lambda_i \sigma_j^{(2)} + \mu_j \varrho_i^{(2)}) \frac{\partial^2 x_\alpha^{(p-2)}}{\partial u_i \partial v_j}$$

$$+ \cdots\cdots = \cdots\cdots .$$

Auf der rechten Seite stehen aus F_α und G_α hervorgehende Glieder von der Form

$$\text{konst. } x_{\alpha'}^{(p')} x_{\alpha''}^{(p'')} x_{\alpha'''}^{(p''')} \ldots,$$

$$\text{konst. } y_{\alpha'}^{(p')} y_{\alpha''}^{(p'')} y_{\alpha'''}^{(p''')} \ldots,$$

wo $p'+p''+p'''+\cdots=p$ ist. Im Falle eines geraden p schließt die linke Seite mit den Ableitungen zweiter Ordnung von $x_\alpha^{(2)}$ ab, im Falle eines ungeraden p mit

$$\sum_{ii'} (\lambda_i \varrho_{i'}^{(p-1)} + \lambda_{i'} \varrho_i^{(p-1)} + \cdots) \frac{\partial^2 x_\alpha^{(1)}}{\partial u_i \partial u_{i'}}$$

$$+ \sum_{jj'} (\mu_j \sigma_{j'}^{(p-1)} + \mu_{j'} \sigma_j^{(p-1)} + \cdots) \frac{\partial^2 x_\alpha^{(1)}}{\partial v_j \partial v_{j'}}$$

$$+ \sum_{ij} (\lambda_i \sigma_j^{(p-1)} + \mu_j \varrho_i^{(p-1)} + \cdots) \frac{\partial^2 x_\alpha^{(1)}}{\partial u_i \partial v_j},$$

d. i. mit

$$-2 (\lambda_i \varrho_i^{(p-1)} + \cdots) k_i \cos u_i$$

für $\alpha = i = 1, \ldots m$, mit

$$2 (\mu_j \sigma_j^{(p-1)} + \cdots) k_j e^{-v_j}$$

für $j = m+1, \ldots n$. Jedes Glied der linken Seite mit Ausnahme der in der ersten Zeile stehenden und der zuletzt angeführten Glieder

$$-2 \lambda_i \varrho_i^{(p-1)} k_i \cos u_i \text{ bezw. } 2 \mu_j \sigma_j^{(p-1)} k_j e^{-v_j}$$

ist gleich einer Ableitung zweiter Ordnung einer der Funktionen $x_\alpha^{(p-2)}, \ldots$, multipliziert mit einer ganzen rationalen Funktion bereits bekannter Größen $\varrho_i^{(2)}, \sigma_j^{(2)}, \ldots$, d. h. mit einer ganzen rationalen Funktion von $k_1^2, \ldots k_m^2$.

Hat man im Falle eines geraden p $x_a^{(1)}, \dots x_a^{(p-1)}$ und $\varrho_i^{(2)}, \dots \varrho_i^{(p-2)}$, $\sigma_j^{(2)}, \dots \sigma_j^{(p-2)}$ in der oben vorausgesetzten Form gefunden, so erhält die Differentialgleichung für $x_a^{(p)}$ die Gestalt

$$\sum_{ii'} \lambda_i \lambda_{i'} \frac{\partial^2 x_a^{(p)}}{\partial u_i \partial u_{i'}} + \sum_{jj'} \mu_j \mu_{j'} \frac{\partial^2 x_a^{(p)}}{\partial v_j \partial v_{j'}} + \sum_{ij} \lambda_i \mu_j \frac{\partial^2 x_a^{(p)}}{\partial u_i \partial v_j} - s_a x_a^{(p)}$$
$$= \Sigma k_1^{p_1} \dots k_n^{p_n} e^{-p_{m+1} v_{m+1} - \dots - p_n v_n} [\mathfrak{A} \cos (q_1 u_1 + \dots + q_m u_m) + \mathfrak{B} \sin (q_1 u_1 + \dots + q_m u_m)],$$

wo $p_1, \dots p_n$ und $q_1, \dots q_m$ dieselben Werte durchlaufen wie in dem oben für $x_a^{(p)}$ vorausgesetzten Ausdruck. Durch Einsetzung dieses Ausdrucks und Koeffizientenvergleichung erhält man für die in $x_a^{(p)}$ enthaltenen Konstanten A, B, welche den Größen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ entsprechen, zwei lineare Gleichungen, und zwar, wenn zur Abkürzung

$$q_1 \lambda_1 + \dots = q_1 \lambda_1 + \dots + q_m \lambda_m,$$
$$p_{m+1} \mu_{m+1} + \dots = p_{m+1} \mu_{m+1} + \dots + p_n \mu_n$$

gesetzt wird:

$$A[(p_{m+1} \mu_{m+1} + \dots)^2 - (q_1 \lambda_1 + \dots)^2 - s_a] - B(q_1 \lambda_1 + \dots)(p_{m+1} \mu_{m+1} + \dots) = 0,$$
$$A(q_1 \lambda_1 + \dots)(p_{m+1} \mu_{m+1} + \dots) + B[(p_{m+1} \mu_{m+1} + \dots)^2 - (q_1 \lambda_1 + \dots)^2 - s_a] = 0.$$

Hieraus ergeben sich A, B als Brüche mit dem Nenner

$$N = [(p_{m+1} \mu_{m+1} + \dots)^2 - (q_1 \lambda_1 + \dots)^2 - s_a]^2 + (q_1 \lambda_1 + \dots)^2 (p_{m+1} \mu_{m+1} + \dots)^2,$$

vorausgesetzt, daß N nicht verschwindet.

Im Falle eines ungeraden p sind außer $x_a^{(1)}, \dots x_a^{(p-1)}$ noch $\varrho_i^{(2)}, \dots \varrho_i^{(p-3)}$, $\sigma_j^{(2)}, \dots \sigma_j^{(p-3)}$ als bekannt vorauszusetzen; außer den Funktionen $x_a^{(p)}$ sind die Konstanten $\varrho_i^{(p-1)}$, $\sigma_j^{(p-1)}$ zu berechnen. In der Differentialgleichung für $x_i^{(p)}$ $(i = 1, \dots m)$ müssen sich die Glieder mit $\cos u_i$ wegheben; wir haben links das noch unbekannte Glied

$$-2 \lambda_i \varrho_i^{(p-1)} k_i \cos u_i,$$

während sich die bekannten Glieder rechts in der Form

$$\mathfrak{G} k_i \cos u_i$$

zusammenfassen lassen, wo $\mathfrak{G}$ eine ganze Funktion von $k_1^2, \dots k_m^2$ vom Grad $\frac{p-1}{2}$

darstellt; es muß also

$$\varrho_i^{(p-1)} = -\frac{\mathfrak{G}}{2\lambda_i}$$

sein. Aus der Differentialgleichung für $x_j^{(p)}$ $(j = m+1, \dots n)$ müssen die Glieder mit e^{-v_j} herausfallen; es sind dies links das unbekannte Glied

$$2\mu_j \sigma_j^{(p-1)} k_j e^{-v_j}$$

und die rechts zusammengefaßten bekannten Glieder

$$\mathfrak{G} k_j e^{-v_j},$$

wo $\mathfrak{G}$ von derselben Form ist wie oben. Man hat also

$$\sigma_j^{(p-1)} = \frac{\mathfrak{G}}{2\mu_j}.$$

Jetzt erfolgt die Berechnung von $x_\alpha^{(p)}$ wie vorhin im Falle eines geraden p. Wenn wir die obige Formel für $x_\alpha^{(p)}$ auch hier anwenden, so erhalten wir eine solche partikuläre Lösung der Differentialgleichung für $x_\alpha^{(p)}$ $(p = 3, 5, \dots)$, daß in $x_i^{(p)}$ $(i = 1, \dots m)$ kein Glied mit $\cos u_i$, in $x_j^{(p)}$ $(j = m+1, \dots n)$ kein Glied mit e^{-v_j} auftritt.

§ 2.

Die angegebene Berechnung von $x_\alpha^{(p)}$ ist nur möglich, wenn keiner der Nenner N verschwindet.

Für $\alpha = i = 1, \dots m$ ist $s_i = -\lambda_i^2$, also

$$N = N_i = (q_1\lambda_1 + \dots + q_m\lambda_m)^2 (p_{m+1}\mu_{m+1} + \dots + p_n\mu_n)^2 + [(p_{m+1}\mu_{m+1} + \dots + p_n\mu_n)^2 - (q_1\lambda_1 + \dots + q_m\lambda_m)^2 + \lambda_i^2]^2;$$

für $\alpha = j = m+1, \dots n$ hat man $s_j = \mu_j^2$, also

$$N = N_j = (q_1\lambda_1 + \dots + q_m\lambda_m)^2 (p_{m+1}\mu_{m+1} + \dots + p_n\mu_n)^2 + [(p_{m+1}\mu_{m+1} + \dots + p_n\mu_n)^2 - \mu_j^2 - (q_1\lambda_1 + \dots + q_m\lambda_m)^2]^2.$$

N_i verschwindet zwar, wenn $q_i = 1$, alle übrigen q und sämtliche p gleich Null sind; N_j verschwindet, wenn $p_j = 1$ ist, während alle übrigen p und sämtliche q gleich Null sind. Im Falle eines ungeraden p sind aber die Glieder mit $\cos u_i$ in der Differentialgleichung für $x_i^{(p)}$ und die Glieder

mit e^{-v_j} in der Differentialgleichung für $x_j^{(p)}$ beseitigt; im Falle eines geraden p kommen solche Glieder von vornherein nicht vor.

Im übrigen verschwindet N_i nur dann, wenn

$$p_{m+1} = 0, \dots p_n = 0$$

und

$$\lambda_i^2 - (q_1 \lambda_1 + \cdots + q_m \lambda_m)^2 = 0$$

ist; dies ist nur möglich, wenn

$$q_1 \lambda_1 + \cdots + q_m \lambda_m = \pm \lambda_i$$

ist, d. h. wenn zwischen $\lambda_1, \dots \lambda_m$ eine Relation

$$g_1 \lambda_1 + \cdots + g_m \lambda_m = 0$$

mit positiven oder negativen ganzzahligen Koeffizienten besteht. N_j kann nur verschwinden, wenn

$$q_1 = 0, \dots q_m = 0$$

und

$$\mu_j^2 - (p_{m+1} \mu_{m+1} + \cdots + p_n \mu_n)^2 = 0$$

oder

$$\mu_j = p_{m+1} \mu_{m+1} + \cdots + p_n \mu_n$$

ist; hier muß natürlich $p_j = 0$ sein, während die übrigen p positiv oder gleich Null sind.

Wir machen demgemäß die beiden Voraussetzungen:

1. *Zwischen $\lambda_1, \dots \lambda_m$ besteht keine Relation*

$$g_1 \lambda_1 + \cdots + g_m \lambda_m = 0,$$

wo $g_1, \dots g_m$ positive oder negative ganze Zahlen sind, die auch teilweise verschwinden können;

2. *zwischen $\mu_{m+1}, \dots \mu_n$ besteht keine Relation*

$$\mu_j = p_{m+1} \mu_{m+1} + \cdots + p_n \mu_n,$$

wo $p_{m+1}, \dots p_n$ positive oder verschwindende ganze Zahlen sind.

Wenn die Größen $\lambda_1, \dots \lambda_m$; $\mu_{m+1}, \dots \mu_n$ diese beiden Voraussetzungen erfüllen, so lassen sich im Falle $m > 1$ doch ganze Zahlen $q_1, \dots q_m$ so wählen, daß der absolute Betrag von

$$\lambda_i^2 - (q_1 \lambda_1 + \cdots + q_m \lambda_m)^2$$

kleiner wird als eine beliebig kleine positive Größe. Nimmt man überdies $p_{m+1}=0, \dots p_n=0$, so wird der Divisor N_i beliebig klein. Kleine Divisoren können nur in solchen Gliedern von $x_1, \dots x_m$ erscheinen, in welchen die Exponentialfunktionen fehlen, in welchen also nur trigonometrische Funktionen vorkommen. In den Gliedern von $x_{m+1}, \dots x_n$ treten kleine Divisoren überhaupt nicht auf.

§ 3.

Die in § 1 formal hergeleiteten Reihen

$$x_\alpha = \sum_{p=1}^{\infty} x_\alpha^{(p)}, \quad x'_\alpha = \sum_{p=1}^{\infty} y_\alpha^{(p)}$$

gestatten ähnliche Umformungen, wie sie im Falle $m=n$ in § 8 der Arbeit in Band 126 dieses Journals vorgenommen wurden.

Man kann x_α und x'_α formal umwandeln in Potenzreihen der $2m+(n-m)=n+m$ Argumente

$$\xi_i = k_i \cos u_i,$$
$$\eta_i = k_i \sin u_i, \qquad (i=1, \dots m)$$
$$\zeta_j = k_j e^{-v_j}. \qquad (j=m+1, \dots n)$$

Ersetzt man die $2m$ Konstanten

$$k_1, \dots k_m;\ l_1, \dots l_m$$

durch die $2m$ neuen Konstanten

$$k'_i = k_i \cos l_i,\ k''_i = k_i \sin l_i, \qquad (i=1, \dots m)$$

so wird

$$\xi_i = k'_i \cos \varrho_i t - k''_i \sin \varrho_i t,$$
$$\eta_i = k'_i \sin \varrho_i t + k''_i \cos \varrho_i t,$$
$$\zeta_j = k_j e^{-\sigma_j t};$$

ϱ_i, σ_j gehen in Potenzreihen von $k_1'^2 + k_2''^2, \dots k_m'^2 + k_m''^2$ über; x_α, x'_α werden Potenzreihen der $n+m$ Integrationskonstanten

$$k'_1, \dots k'_m;\ k''_1, \dots k''_m;\ k_{m+1}, \dots k_n.$$

Wir schreiben:

$$x_a = \Sigma (k_{m+1}\, e^{-\sigma_{m+1} t})^{p_{m+1}} \dots (k_n\, e^{-\sigma_n t})^{p_n} \cdot k_1'^{p_1'} \dots k_m'^{p_m'}\, k_1''^{p_1''} \dots k_m''^{p_m''}$$
$$\times [A \cos (q_1 \varrho_1 + \dots + q_m \varrho_m) t + B \sin (q_1 \varrho_1 + \dots + q_m \varrho_m) t];$$

die p, p', p'' sind positive, die q positive und negative ganze Zahlen, welche die Bedingung erfüllen:

$$|q_i| = p_i' + p_i'' - 2 g_i, \quad (g_i = 0, 1, 2, \dots).^*) \qquad (i = 1, \dots m)$$

Für $t = 0$ *sei*

$$x_a = c_a, \qquad (a = 1, \dots n)$$

$$x_i' = c_i'. \qquad (i = 1, \dots m)$$

Diese $n + m$ *Anfangswerte* $c_1, \dots c_n;\ c_1', \dots c_m'$ *mögen jetzt als Integrationskonstante eingeführt werden.***) Wie oben seien x_a, x_a' als Potenzreihen dargestellt:

$$x_a = \mathfrak{P}_a (\xi_1, \dots \xi_m;\ \eta_1, \dots \eta_m;\ \zeta_{m+1}, \dots \zeta_n),$$
$$x_a' = \mathfrak{Q}_a (\xi_1, \dots \xi_m;\ \eta_1, \dots \eta_m;\ \zeta_{m+1}, \dots \zeta_n).$$

Unter Beschränkung auf die linearen Glieder ist

$$\mathfrak{P}_i = \xi_i + \dots, \qquad (i = 1, \dots m)$$
$$\mathfrak{Q}_i = -\lambda_i \eta_i + \dots,$$
$$\mathfrak{P}_j = \zeta_j + \dots. \qquad (j = m+1, \dots n)$$

Für $t = 0$ ist

$$\xi_i = k_i', \quad \eta_i = k_i'', \quad \zeta_j = k_j.$$

Daher ergeben sich c_i, c_i', c_j als Potenzreihen von $k_1', \dots;\ k_1'', \dots;\ k_{m+1}, \dots$, von welchen wir nur die linearen Glieder anschreiben:

$$c_i = k_i' + \dots, \qquad (i = 1, \dots m)$$
$$c_i' = -\lambda_i k_i'' + \dots,$$
$$c_j = k_j + \dots. \qquad (j = m+1, \dots n)$$

Umgekehrt berechnen sich hieraus k_i', k_i'', k_j als Potenzreihen von $c_1, \dots c_n;\ c_1', \dots c_m'$, von welchen wir die linearen Glieder angeben:

---

*) Vergl. dieses Journal Bd. 126, S. 210.
**) Vergl. dieses Journal Bd. 126, S. 210—211.

$$k_i' = c_i + \cdots, \qquad (i=1, \ldots m)$$

$$k_i'' = -\frac{c_i'}{\lambda_i} + \cdots,$$

$$k_j = c_j + \cdots. \qquad (j=m+1, \ldots n)$$

Hieraus folgt

$$k_i^2 = k_i'^2 + k_i''^2 = c_i^2 + \frac{c_i'^2}{\lambda_i^2} + \cdots.$$

Hiernach gehen

$$\varrho_i = \lambda_i + \cdots, \quad \sigma_j = \mu_j + \cdots$$

in Potenzreihen von $c_1, \ldots c_n$; $c_1', \ldots c_m'$ ohne lineare Glieder über, die quadratischen Glieder sind linear in

$$c_1^2 + \frac{c_1'^2}{\lambda_1^2}, \cdots c_m^2 + \frac{c_m'^2}{\lambda_m^2}.$$

Für x_a erhält man eine Potenzreihe von $c_1, \ldots c_n$; $c_1', \ldots c_m'$:

$$x_a = \Sigma c_1^{p_1} \ldots c_n^{p_n} c_1'^{p_1'} \ldots c_m'^{p_m'} \cdot e^{-(q_{m+1}\sigma_{m+1} + \cdots + q_n\sigma_n)t}$$
$$\times [A \cos (q_1\varrho_1 + \cdots + q_m\varrho_m)t + B \sin (q_1\varrho_1 + \cdots + q_m\varrho_m)t];$$

darin sind die p, p' positive ganze Zahlen, $q_{m+1}, \ldots q_n$ positive, $q_1, \ldots q_m$ positive und negative ganze Zahlen, welche die Bedingung erfüllen:

$$|q_1| + \cdots + |q_m| \leqq p_1 + \cdots + p_m + p_1' + \cdots + p_m',$$
$$q_{m+1} + \cdots + q_n \leqq p_{m+1} + \cdots + p_n.$$

Wir schreiben die in den Integrationskonstanten linearen Glieder an:

$$x_i = c_i \cos \varrho_i t + \frac{c_i'}{\lambda_i} \sin \varrho_i t + \cdots, \qquad (i=1, \ldots m)$$

$$x_j = c_j e^{-\sigma_j t} + \cdots. \qquad (j=m+1, \ldots n)$$

Wir können der obigen Reihe auch die Form geben:

$$x_a = \Sigma [A \cos (q_1\varrho_1 + \cdots + q_m\varrho_m)t + B \sin (q_1\varrho_1 + \cdots + q_m\varrho_m)t]$$
$$\times e^{-(q_{m+1}\sigma_{m+1} + \cdots + q_n\sigma_n)t};$$

darin sind $q_{m+1}, \ldots q_n$ positive, $q_1, \ldots q_m$ positive und negative ganze Zahlen; A, B sind Potenzreihen von $c_1, \ldots c_n$; $c_1', \ldots c_m'$ mit Gliedern von der Form

$$C c_1^{p_1} \ldots c_n^{p_n} c_1'^{p_1'} \ldots c_m'^{p_m'},$$

wo die p, p' positive ganze Zahlen sind, welche mit den q durch die vorhin angegebenen Bedingungen verknüpft sind.

Nachdem die formale Existenz der Reihen nachgewiesen ist, können die Entwicklungen von $x_1, \dots x_n$, sowie von $\varrho_1, \dots \varrho_m$; $\sigma_{m+1}, \dots \sigma_n$ direkt aus den Differentialgleichungen (A.) berechnet werden,*) wie dies in § 5 geschieht.

§ 4.

Es möge auf die Reihen hingewiesen werden, welche aus den bisherigen Reihen durch Nullsetzen eines Teils der Integrationskonstanten hervorgehen.

1. Setzt man

$$k_{m+1} = 0, \dots k_n = 0,$$

so wird

$$x_a = \sum_{p=1}^{\infty} x_a^{(p)};$$

$$x_i^{(1)} = k_i \cos u_i, \qquad (i = 1, \dots m)$$

$$x_j^{(1)} = 0 \qquad (j = m+1, \dots n)$$

und

$$x_a^{(p)} = \Sigma A\, k_1^{p_1} \dots k_m^{p_m} \cos (q_1 u_1 + \dots + q_m u_m),$$

wo $p_1, \dots p_m$ positive ganze Zahlen mit der Summe p und $q_1, \dots q_m$ positive und negative ganze Zahlen sind, für welche

$$|q_i| = p_i - 2g_i \qquad (i = 1, \dots m)$$

ist (g_i ganze positive Zahl einschließlich Null). Es sind dies die Reihen, auf welche in Bd. 126, S. 232 dieses Journals hingewiesen ist. Die formale Berechnung dieser Reihen ist möglich, wenn die λ die in § 2 angegebene Bedingung erfüllen, während die μ beliebig sind.

Aus den Gleichungen

$$k_j = c_j + \dots = 0, \qquad (j = m+1, \dots n)$$

worin an Stelle der Punkte Potenzreihen von $c_1, \dots c_n$; $c_1', \dots c_m'$ mit Gliedern zweiter und höherer Dimension stehen, ergeben sich $c_{m+1}, \dots c_n$ als Potenzreihen von $c_1, \dots c_m$; $c_1', \dots c_m'$, welche mit quadratischen Gliedern beginnen.

*) Vergl. Bd. 126, S. 227—230 dieses Journals.

Man erhält x_a als Potenzreihe von $c_1, \dots c_m$; $c'_1, \dots c'_m$, deren Koeffizienten Funktionen von $u_1, \dots u_m$ sind:

$$x_a = \Sigma c_1^{p_1} \dots c_m^{p_m} c_1'^{p'_1} \dots c_m'^{p'_m} \times [A \cos(q_1 u_1 + \dots + q_m u_m) + B \sin(q_1 u_1 + \dots + q_m u_m)];$$

hierbei sind $q_1, \dots q_m$ positive und negative ganze Zahlen, welche die Bedingung

$$|q_1| + \dots + |q_m| \leqq p_1 + \dots + p_m + p'_1 + \dots + p'_m$$

erfüllen.

2. Wenn man

$$k_1 = 0, \dots k_m = 0$$

setzt, wird $\sigma_j = \mu_j$, also

$$v_j = \mu_j t. \qquad (j = m+1, \dots n)$$

Man hat

$$x_i^{(1)} = 0, \qquad (i = 1, \dots m)$$

$$x_j^{(1)} = k_j e^{-\mu_j t} \qquad (j = m+1, \dots n)$$

und

$$x_a^{(p)} = \Sigma A (k_{m+1} e^{-\mu_{m+1} t})^{p_{m+1}} \dots (k_n e^{-\mu t})^{p_n},$$

wo $p_{m+1}, \dots p_n$ ganze positive Zahlen mit der Summe p sind. Demnach erscheinen $x_1, \dots x_n$ als Potenzreihen der $n - m$ Argumente

$$k_{m+1} e^{-\mu_{m+1} t}, \dots k_n e^{-\mu_n t};$$

diese Reihen sind konvergent,*) wenn die absoluten Beträge der Argumente hinreichend klein sind. Das System nähert sich der Gleichgewichtslage O asymptotisch, wenn t unbegrenzt wächst. Vorausgesetzt ist dabei, daß die μ die in § 2 angegebene Bedingung erfüllen, während die λ jetzt keiner Bedingung unterworfen sind.

Die Bedingungen

$$k_i = 0 \qquad (i = 1, \dots m)$$

zerfallen in

$$k'_i = c_i + \dots = 0, \qquad (i = 1, \dots m)$$

$$k''_i = -\frac{c'_i}{\lambda_i} + \dots = 0.$$

*) Vergl. z. B. *Picard*, Traité d'Analyse, Bd. III, S. 17 ff., S. 185 ff.

Sie liefern $c_1, \dots c_m$; $c_1', \dots c_m'$ als Potenzreihen von $c_{m+1}, \dots c_n$, welche mit quadratischen Gliedern beginnen. Somit erscheint x_α als Potenzreihe von $c_{m+1}, \dots c_n$, deren Koeffizienten von

$$e^{-\mu_{m+1} t}, \dots e^{-\mu_n t}$$

abhängen; unter Beschränkung auf die linearen Glieder ist

$$x_i = \quad + \cdots, \qquad (i = 1, \dots m)$$

$$x_j = c_j e^{-\mu_j t} + \cdots. \qquad (j = m+1, \dots n)$$

3. Wir setzen jetzt

$$k_2 = 0, \dots k_m = 0, \; k_{m+1} = 0, \dots k_n = 0.$$

Dann ist

$$x_1^{(1)} = k_1 \cos u_1, \; x_2^{(1)} = 0, \dots x_n^{(1)} = 0$$

und

$$x_\alpha^{(p)} = \Sigma A k_1^p \cos q_1 u_1; \; |q_1| = p, p-2, p-4, \dots;$$

hierin ist $u_1 = \varrho_1 t + l_1$ und $\varrho_1 = \lambda_1 + \cdots$ eine Potenzreihe von k_1^2. Die in § 2 betrachteten Divisoren sind hier

$$N_i = \lambda_i^2 - q_1^2 \lambda_1^2, \; N_j = -\mu_j^2 - q_1^2 \lambda_1^2.$$

Damit kein Divisor verschwindet, setzen wir voraus, daß keiner der Quotienten

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \cdots \frac{\lambda_m}{\lambda_1}$$

eine ganze Zahl ist.

Aus den jetzt erfüllten Bedingungen

$$k_i' = c_i + \cdots = 0, \qquad (i = 2, \dots m)$$

$$k_i'' = -\frac{c_i'}{\lambda_i} + \cdots = 0,$$

$$k_j = c_j + \cdots \qquad (j = m+1, \dots n)$$

ergeben sich $c_2, \dots c_m$; $c_2', \dots c_m'$; $c_{m+1}, \dots c_n$ als Potenzreihen von c_1, c_1', welche mit quadratischen Gliedern beginnen. Wir wählen den Anfangspunkt der Zeit t so, daß $c_1' = 0$ wird. Dann wird $k_1^2 = k_1'^2 + k_1''^2 = c_1^2 + \cdots$ eine Potenzreihe von c_1, welche mit dem Gliede c_1^2 beginnt; k_1 wird also eine Potenzreihe von c_1, deren Anfangsglied wir gleich $+c_1$ annehmen können, und $\varrho_1 = \lambda_1 + \cdots$ eine Potenzreihe von c_1 ohne lineares Glied. So geht x_α in eine

Potenzreihe von c_1 über, in welcher der Koeffizient von c_1^p eine lineare Funktion von $\cos \nu \varrho_1 t$ $(\nu = 1, 2, \dots p)$ ist. Daß keine Sinusglieder auftreten, erkennt man durch direkte Berechnung der Reihen aus den Differentialgleichungen. Es sind dies dieselben Reihen, welche in § 5 der Arbeit des Verfassers im 48. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik abgeleitet sind. Sie konvergieren, wenn $|c_1|$ hinreichend klein bleibt, für alle Werte von t und stellen eine periodische Bewegung mit der Periode $\frac{2\pi}{\varrho_1}$ dar.

4. Es sei schließlich

$$k_2 = 0, \dots k_m = 0,$$

während $k_{m+1}, \dots k_n$ von Null verschieden seien. Dann wird

$$x_1^{(1)} = k_1 \cos u_1, \quad x_2^{(1)} = 0, \dots x_m^{(1)} = 0; \quad x_j^{(1)} = k_j e^{-v_j} \qquad (j = m+1, \dots n)$$

und

$$x_\alpha^{(p)} = \Sigma k_1^{p_1} k_{m+1}^{p_{m+1}} \dots k_n^{p_n} e^{-(p_{m+1} v_{m+1} + \dots + p_n v_n)} \cdot (A \cos q_1 u_1 + B \sin q_1 u_1)$$

$$(p_1 + p_{m+1} + \dots + p_n = p; \; q_1 = p_1, p_1 - 2, \dots);$$

$\varrho_1 = \lambda_1 + \dots$, $\sigma_j = \mu_j + \dots$ $(j = m+1, \dots n)$ sind Potenzreihen von k_1^2. Damit die formale Berechnung der Reihen möglich ist, darf keiner der Quotienten

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \dots \frac{\lambda_m}{\lambda_1}$$

eine ganze Zahl sein, und die μ müssen die in § 2 angegebene Bedingung erfüllen.

Die Gleichungen

$$k_i = 0 \qquad (i = 2, \dots m)$$

oder

$$k_i' = c_i + \dots = 0, \qquad (i = 2, \dots m)$$

$$k_i'' = -\frac{c_i'}{\lambda_i} + \dots = 0$$

ergeben $c_2, \dots c_m$; $c_2', \dots c_m'$ als Potenzreihen von $c_1, c_{m+1}, \dots c_n$, wenn $c_1' = 0$ angenommen wird. Man hat

$$x_\alpha = \Sigma c_1^{p_1} c_{m+1}^{p_{m+1}} \dots c_n^{p_n} \cdot e^{-(q_{m+1}\sigma_{m+1} + \dots + q_n \sigma_n) t} (A \cos q_1 \varrho_1 t + B \sin q_1 \varrho_1 t);$$

hierin sind p_1, $p_{m+1}, \dots p_n$ positive ganze Zahlen; q_1 ist eine positive oder negative ganze Zahl, $q_{m+1}, \dots q_n$ sind positive ganze Zahlen, welche die

Bedingungen erfüllen:

$$|q_1| \leqq p_1, \quad q_{m+1} + \cdots + q_n \leqq p_{m+1} + \cdots + p_n.$$

Die Größen $\varrho_1 = \lambda_1 + \cdots$, $\sigma_{m+1} = \mu_{m+1} + \cdots, \cdots \sigma_n = \mu_n + \cdots$ sind Potenzreihen von $c_1, c_{m+1}, \ldots c_n$, in welchen die linearen Glieder fehlen und die quadratischen Glieder von der Form konst. c_1^2 sind. Man kann zu diesen Reihen auf einem anderen Wege gelangen, auf welchem auch die Konvergenzfrage erledigt wird.*)

§ 5.

Wir wollen nun die von den Integrationskonstanten $c_1, \ldots c_n;\ c_1', \ldots c_m'$ abhängigen Reihen, deren Existenz am Schluß von § 3 nachgewiesen wurde, unmittelbar aus den Differentialgleichungen (A.) berechnen. *Dabei werden die früher eingeführten Bezeichnungen zum Teil in anderer Bedeutung benutzt.*

Wir setzen

$$x_a = x_a^{(1)} + x_a^{(2)} + \cdots + x_a^{(p)} + \cdots,$$
$$x_a' = y_a^{(1)} + y_a^{(2)} + \cdots + y_a^{(p)} + \cdots;$$

$x_a^{(p)}$, $y_a^{(p)}$ sind ganze homogene Funktionen p-ter Dimension der Konstanten

$$c_1, \ldots c_n;\ c_1', \ldots c_m'$$

und trigonometrische und Exponentialfunktionen von

$$u_i = \varrho_i t, \qquad (i = 1, \ldots m)$$
$$v_j = \sigma_j t. \qquad (j = m+1, \ldots n)$$

Dabei ist

$$\varrho_i = \lambda_i + \varrho_i^{(2} + \varrho_i^{(3)} + \cdots,$$
$$\sigma_j = \mu_j + \sigma_j^{(2)} + \sigma_j^{(3)} + \cdots,$$

*wo $\varrho_i^{(p)}$, $\sigma_j^{(p)}$ ganze homogene Funktionen p-ter Dimension der $n+m$ Konstanten c, c' sind.***) *Für $t=0$ ist*

---

*) Nach Analogie von *Poincaré*, Méth. nouv. Bd. I, Kap. 3, 4, 7 (Solutions périodiques, exposants charactéristiques, solutions asymptotiques).

**) Die Größen $\varrho_i^{(2)}$, $\sigma_j^{(2)}$ sind (vergl. § 3) lineare homogene Funktionen von

$$c_1^2 + \frac{c_1'^2}{\lambda_1^2}, \ldots c_m^2 + \frac{c_m'^2}{\lambda_m^2}.$$

$$x_\alpha = c_\alpha;\ x'_i = c'_i, \qquad (\alpha = 1, \dots n;\ i = 1, \dots m)$$

also

$$x_\alpha^{(1)} = c_\alpha,\ x_\alpha^{(2)} = 0,\ x_\alpha^{(3)} = 0, \dots, \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

$$y_i^{(1)} = c'_i,\ y_i^{(2)} = 0,\ y_i^{(3)} = 0, \dots .^*) \qquad (i = 1, \dots m)$$

Setzt man

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \frac{\partial x_\alpha}{\partial u_i} + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j \frac{\partial x_\alpha}{\partial v_j},$$

$$\frac{dx'_\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \frac{\partial x'_\alpha}{\partial u_i} + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j \frac{\partial x'_\alpha}{\partial v_j},$$

so gehen die Differentialgleichungen (A.)

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = x'_\alpha,$$

$$\frac{dx'_\alpha}{dt} = s_\alpha x_\alpha + F_\alpha(x'_1, \dots x'_n; x_1, \dots x_n) + G_\alpha(x_1, \dots x_n)$$

über in

$$\sum_{ij} \varrho_i \frac{\partial x_\alpha}{\partial u_i} + \sum_j \sigma_j \frac{\partial x_\alpha}{\partial v_j} = x'_\alpha,$$

$$\sum_i \varrho_i \frac{\partial x'_\alpha}{\partial u_i} + \sum_j \sigma_j \frac{\partial x'_\alpha}{\partial v_j} = s_\alpha x_\alpha + F_\alpha(x'_1, \dots x'_n; x_1, \dots x_n) + G_\alpha(x_1, \dots x_n).$$

Wir setzen die obigen Reihen für $x_\alpha, x'_\alpha, \varrho_i, \sigma_j$ ein und vergleichen die Glieder erster, ... p-ter Dimension in bezug auf die c, c'.

Die Gleichungen

$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial x_\alpha^{(1)}}{\partial u_i} + \sum_j \mu_j \frac{\partial x_\alpha^{(1)}}{\partial v_j} = y_\alpha^{(1)},$$

$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial y_\alpha^{(1)}}{\partial u_i} + \sum_j \mu_j \frac{\partial y_\alpha^{(1)}}{\partial v_j} = s_\alpha x_\alpha^{(1)}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x_\alpha^{(1)} = c_\alpha,\ y_i^{(1)} = c'_i \text{ für } t = 0$$

ergeben

$$x_i^{(1)} = c_i \cos u_i + \frac{c'_i}{\lambda_i} \sin u_i,\ x_j^{(1)} = c_j e^{-v_j},$$

$$y_i^{(1)} = -c_i \lambda_i \sin u_i + c'_i \cos u_i,\ y_j^{(1)} = -c_j \mu_j e^{-v_j}.$$
$$(i = 1, \dots m;\ j = m+1, \dots n)$$

*) Vergl. Bd. 126, S. 227 ff. dieses Journals.

Für $x_a^{(p)}$, $y_a^{(p)}$ müssen sich (vergl. das Ende von § 3) Ausdrücke von folgender Form ergeben:

$$x_a^{(p)} = \Sigma[A\cos(q_1 u_1 + \cdots + q_m u_m) + B\sin(q_1 u_1 + \cdots + q_m u_m)]\, e^{-(q_{m+1} v_{m+1} + \cdots + q_n v_n)},$$
$$y_a^{(p)} = \Sigma[A'\cos(q_1 u_1 + \cdots + q_m u_m) + B'\sin(q_1 u_1 + \cdots + q_m u_m)]\, e^{-(q_{m+1} v_{m+1} + \cdots + q_n v_n)};$$

darin sind $q_{m+1}, \ldots q_n$ positive, $q_1, \ldots q_m$ positive und negative ganze Zahlen, welche die Bedingung

$$|q_1| + \cdots + |q_m| + q_{m+1} + \cdots + q_n \leqq p$$

erfüllen; A, B, A', B' sind ganze homogene Funktionen p-ter Dimension der c, c'. Unter der Voraussetzung, daß

$$x_a^{(1)}, \ldots x_a^{(p-1)}; \quad y_a^{(1)}, \ldots y_a^{(p-1)};$$
$$\varrho_i^{(2)}, \ldots \varrho_i^{(p-2)}; \quad \sigma_j^{(2)}, \ldots \sigma_j^{(p-2)}$$

bereits berechnet sind und die oben angenommene Form besitzen, berechnen wir

$$x_a^{(p)}, y_a^{(p)}; \ \varrho_i^{(p-1)}, \sigma_j^{(p-1)}.$$

Wir haben die Differentialgleichungen

$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial x_a^{(p)}}{\partial u_i} + \sum_j \mu_j \frac{\partial x_a^{(p)}}{\partial v_j} + \sum_i \varrho_i^{(2)} \frac{\partial x_a^{(p-2)}}{\partial u_i} + \sum_j \sigma_j^{(2)} \frac{\partial x_a^{(p-2)}}{\partial v_j} + \cdots$$
$$+ \sum_i \varrho_i^{(p-1)} \frac{\partial x_a^{(1)}}{\partial u_i} + \sum_j \sigma_j^{(p-1)} \frac{\partial x_a^{(1)}}{\partial v_j} = y_a^{(p)},$$
$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial y_a^{(p)}}{\partial u_i} + \sum_j \mu_j \frac{\partial y_a^{(p)}}{\partial v_j} + \sum_i \varrho_i^{(2)} \frac{\partial y_a^{(p-2)}}{\partial u_i} + \sum_j \sigma_j^{(2)} \frac{\partial y_a^{(p-2)}}{\partial v_j} + \cdots$$
$$+ \sum_i \varrho_i^{(p-1)} \frac{\partial y_a^{(1)}}{\partial u_i} + \sum_j \sigma_j^{(p-1)} \frac{\partial y_a^{(1)}}{\partial v_j} = s_a x_a^{(p)} + Q_a;$$

Q_a ist eine Summe von Gliedern

$$\text{konst. } x_{a_1}^{(s_1)} \ldots x_{a_r}^{(s_r)}, \qquad (r \geqq 2,\ s_1 + \cdots + s_r = p)$$

wo auch an Stelle zweier Faktoren x die entsprechenden Faktoren y treten können. Durch Einsetzung der Ausdrücke für die bereits berechneten Größen erhält man

$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial x_a^{(p)}}{\partial u_i} + \sum_j \mu_j \frac{\partial x_a^{(p)}}{\partial v_j} = y_a^{(p)} + \cdots$$
$$+ \Sigma[\mathfrak{A}\cos(q_1 u_1 + \cdots) + \mathfrak{B}\sin(q_1 u_1 + \cdots)]\, e^{-(q_{m+1} v_{m+1} + \cdots)},$$

$$\sum_i \lambda_i \frac{\partial y_a^{(p)}}{\partial u_i} + \sum_j \mu_j \frac{\partial y_a^{(p)}}{\partial v_j} = s_a x_a^{(p)} + \cdots$$
$$+ \sum [\mathfrak{A}' \cos(q_1 u_1 + \cdots) + \mathfrak{B}' \sin(q_1 u_1 + \cdots)]\, e^{-(q_{m+1} v_{m+1} + \cdots)},$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ ganze homogene Funktionen p-ter Dimension der c, c' sind. Auf den rechten Seiten der beiden Gleichungen sollen an Stelle der Punkte, wenn $\alpha = i = 1, \ldots m$ ist, die Glieder

$$\varrho_i^{(p-1)} \left(c_i \sin u_i - \frac{c_i'}{\lambda_i} \cos u_i\right) + \mathfrak{a}_i \cos u_i + \mathfrak{b}_i \sin u_i,$$
$$\varrho_i^{(p-1)} (c_i \lambda_i \cos u_i + c_i' \sin u_i) + \mathfrak{a}_i' \cos u_i + \mathfrak{b}_i' \sin u_i$$

stehen; wenn $\alpha = j = m+1, \ldots n$ ist, die Glieder

$$\sigma_j^{(p-1)} \cdot c_j e^{-v_j} + \mathfrak{a}_j e^{-v_j},$$
$$-\sigma_j^{(p-1)} \cdot c_j \mu_j e^{-v_j} + \mathfrak{a}_j' e^{-v_j};$$

die $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}'$ sind ganze homogene Funktionen p-ten Grades der c, c'.*)

Damit $x_i^{(p)}$, $y_i^{(p)}$ und $x_j^{(p)}$, $y_j^{(p)}$ die angegebene Form haben können, muß**) einerseits

$$2 c_i \varrho_i^{(p-1)} + \mathfrak{b}_i + \frac{\mathfrak{a}_i'}{\lambda_i} = 0,$$
$$2 \frac{c_i'}{\lambda_i} \varrho_i^{(p-1)} = \mathfrak{a}_i - \frac{\mathfrak{b}_i'}{\lambda_i},$$

andererseits

$$2 c_j \mu_j \sigma_j^{(p-1)} = \mathfrak{a}_j' - \mu_j \mathfrak{a}_j$$

sein; die beiden ersten Gleichungen müssen durch eine ganze homogene Funktion $\varrho_i^{(p-1)}$, die letzte Gleichung durch eine ganze homogene Funktion $\sigma_j^{(p-1)}$ der c, c' von der Dimension $p-1$ befriedigt werden.

Die oben eingeführten Größen A, B, A', B' werden aus den Gleichungen berechnet:***)

---

*) Daher erstrecken sich die Summationen auf den rechten Seiten für $\alpha = i$ nicht auf die Glieder mit $\cos u_i$ und $\sin u_i$, für $\alpha = j$ nicht auf das Glied mit e^{-v_j}.

**) In betreff der Begründung vergl. den Schluß dieses Paragraphen.

***) Zur Abkürzung ist geschrieben:

$$q_1 \lambda_1 + \cdots + q_m \lambda_m = q_1 \lambda_1 + \cdots,$$
$$q_{m+1} \mu_{m+1} + \cdots + q_n \mu_n = q_{m+1} \mu_{m+1} + \cdots.$$

$$-A(q_{m+1}\mu_{m+1}+\cdots)+B(q_1\lambda_1+\cdots)=A'+\mathfrak{A},$$
$$-A(q_1\lambda_1+\cdots)-B(q_{m+1}\mu_{m+1}+\cdots)=B'+\mathfrak{B};$$
$$-A'(q_{m+1}\mu_{m+1}+\cdots)+B'(q_1\lambda_1+\cdots)=s_\alpha A+\mathfrak{A}',$$
$$-A'(q_1\lambda_1+\cdots)-B'(q_{m+1}\mu_{m+1}+\cdots)=s_\alpha B+\mathfrak{B}'.$$

Durch Elimination von A', B' erhält man die beiden Gleichungen

$$A[(q_{m+1}\mu_{m+1}+\cdots)^2-(q_1\lambda_1+\cdots)^2-s_\alpha]-2B(q_1\lambda_1+\cdots)(q_{m+1}\mu_{m+1}+\cdots)$$
$$=\mathfrak{A}'-\mathfrak{A}(q_{m+1}\mu_{m+1}+\cdots)+\mathfrak{B}(q_1\lambda_1+\cdots),$$
$$2A(q_1\lambda_1+\cdots)(q_{m+1}\mu_{m+1}+\cdots)+B[(q_{m+1}\mu_{m+1}+\cdots)^2-(q_1\lambda_1+\cdots)^2-s_\alpha]$$
$$=\mathfrak{B}'-\mathfrak{A}(q_1\lambda_1+\cdots)-\mathfrak{B}(q_{m+1}\mu_{m+1}+\cdots),$$

aus welchen sich A, B berechnen lassen, wenn

$$N_\alpha=[(q_{m+1}\mu_{m+1}+\cdots)^2-(q_1\lambda_1+\cdots)^2-s_\alpha]^2+(q_1\lambda_1+\cdots)^2(q_{m+1}\mu_{m+1}+\cdots)^2$$

von Null verschieden ist. Darin ist

$$s_i=-\lambda_i^2\,(i=1,\ldots m);\ s_j=\mu_j^2\,(j=m+1,\ldots n).$$

Der Ausdruck N_α kann unter den in § 2 gemachten Voraussetzungen nur verschwinden, wenn $q_\alpha=1$ ist, während die übrigen q verschwinden.

Zur Berechnung der in

$$x_i^{(p)}=A\cos u_i+B\sin u_i+\cdots,$$
$$y_i^{(p)}=A'\cos u_i+B'\sin u_i+\cdots$$

enthaltenen Glieder mit $\cos u_i$ und $\sin u_i$ dienen die Gleichungen

$$B\lambda_i=A'+\mathfrak{A},\ -A\lambda_i=B'+\mathfrak{B};$$
$$B'\lambda_i=-\lambda_i^2A+\mathfrak{A}',\ -A'\lambda_i=-\lambda_i^2B+\mathfrak{B}',$$

welche aus den obigen allgemeinen Gleichungen dadurch hervorgehen, daß man $\alpha=i$, $q_i=1$, die übrigen q gleich Null setzt; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ mögen jetzt das bereits berechnete $\varrho_i^{(p-1)}$ enthalten. Die erste und vierte Gleichung

$$B\lambda_i-A'=\mathfrak{A},\quad B\lambda_i-A'=\frac{\mathfrak{B}'}{\lambda_i},$$

sowie die zweite und dritte Gleichung

$$A\lambda_i+B'=-\mathfrak{B},\quad A\lambda_i+B'=\frac{\mathfrak{A}'}{\lambda_i}$$

müssen übereinstimmen; infolge der von selbst erfüllten Bedingungen

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{B}'}{\lambda_i},\qquad \mathfrak{B}+\frac{\mathfrak{A}'}{\lambda_i}=0$$

reduzieren sich die vier Gleichungen auf die beiden

$$A'-B\lambda_i+\mathfrak{A}=0,\quad A\lambda_i+B'+\mathfrak{B}=0;$$

zwei weitere Gleichungen ergeben sich aus der Bedingung, daß $x_i^{(p)}, y_i^{(p)}$ für $t=0$ verschwinden.

Die in

$$x_j^{(p)}=A\,e^{-v_j}+\cdots,$$
$$y_j^{(p)}=A'e^{-v_j}+\cdots$$

enthaltenen Glieder mit e^{-v_j} berechnen sich aus den Gleichungen

$$-A\,\mu_j=A'+\mathfrak{A},$$
$$-A'\mu_j=A\,\mu_j^2+\mathfrak{A}',$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ auch das bereits berechnete $\sigma_j^{(p-1)}$ enthalten. Diese beiden Gleichungen reduzieren sich infolge der von selbst erfüllten Bedingung

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{A}'}{\mu_j}$$

auf die eine

$$A\mu_j+A'+\mathfrak{A}=0;$$

eine zweite Gleichung liefert die Bedingung, daß $x_j^{(p)}$ für $t=0$ verschwindet.

Die Biegungs-Invarianten und Kovarianten von gegebener Ordnung.

Von Herrn *J. Knoblauch* in Berlin.

Im 16. Bande der Acta Mathematica (1892) hat *Żorawski* die Aufgabe in Angriff genommen, für eine gegebene Ordnung der Differentiationen die Anzahl der aus einer binären quadratischen Differentialform und einem System willkürlicher Funktionen abzuleitenden Ausdrücke zu bestimmen, die bei einer beliebigen Änderung der Variabeln in die formell gleichgebildeten übergehen und dabei so beschaffen sind, daß alle übrigen Ausdrücke derselben Art von ihnen abhängen. Man kann im Zweifel sein, ob die Methode der infinitesimalen Transformationen, nach der die Aufgabe dort behandelt wird, als zweckmäßig anzusehen ist, wenn man bemerkt, daß ihre Anwendung schon beim ersten Schritt den eigentlichen Inhalt des der Untersuchung zugrunde liegenden Gleichungssystems zerstört (vgl. S. 9 a. a. O.). Wenigstens wird man sie angesichts dieses Umstandes nur dann als berechtigt betrachten dürfen, wenn sie besonders einfach zum Ziel führt. Aber das Gegenteil ist der Fall; aus dem weitschichtigen Formelapparat, den die *Lie*sche Theorie mit sich bringt, läßt sich lediglich der Antrieb entnehmen, die interessante und wichtige Aufgabe auf einem anderen Wege zu lösen.

Wie man aber auch über die Behandlungsweise denken möge, so bedarf das Problem selbst doch aus dem Grunde einer Neubearbeitung, weil die von *Żorawski* ermittelten Anzahlen an zwei Stellen wesentlich anders zu gruppieren sind, wenn die gewöhnliche und für die Anwendungen durchaus zweckmäßige Definition der Unabhängigkeit von Invarianten festgehalten wird. Es findet sich nämlich a. a. O. S. 38 die Angabe, daß für die vierte Ordnung sechs von einander unabhängige Biegungskovarianten einer einzigen

Funktion vorhanden seien. Nun kann aber die Anzahl unabhängiger Biegungskovarianten einer gegebenen Ordnung niemals die der partiellen Ableitungen derselben Ordnung übertreffen, und diese Anzahl ist für die vierte Ordnung gleich fünf. Wenn also in den mir bekannten Arbeiten, die eine Verallgemeinerung oder sonstige Erweiterung der *Żorawski*schen Ergebnisse zum Zweck haben, der von ihm selbst behandelte Fall als erledigt betrachtet wird, so kann ich mich dieser Anschauung nicht anschließen.

Die folgende Untersuchung bezieht sich, außer auf die Invarianten, nur auf die sogenannten *Beltrami*schen Biegungskovarianten. Die *Minding*schen Kovarianten, die aus diesen abgeleitet werden können, bleiben unberücksichtigt. Ferner wird gleichzeitig mit der quadratischen Differentialform nur eine einzige willkürliche Funktion betrachtet. Diese Beschränkung ist unwesentlich, denn aus den hierbei gewonnenen Ergebnissen lassen sich die allgemeinen leicht ableiten, wie auch bei *Żorawski* auseinandergesetzt ist.

I.

Von allen Methoden, die man anwenden kann, um die Existenz und den gegenseitigen Zusammenhang von Ausdrücken zu diskutieren, die in der Deformationstheorie den Charakter von Invarianten oder Kovarianten haben, erscheint diejenige am natürlichsten, die sich unmittelbar auf die Grundgleichungen der Theorie stützt und mittels elementarer Operationen zum Ziel führt. Es sei

$$\sum_{i,k} a_{ik}\, du_i\, du_k \equiv \mathsf{A}$$

eine binäre quadratische Differentialform von nicht verschwindender Determinante. Die Indices i und k nehmen unabhängig von einander die Werte 1, 2 an. Für die Koeffizienten gilt die Bedingung

$$a_{ki} = a_{ik}\,.$$

Bezieht man die Form auf zwei neue Variable, die Funktionen der alten sind, so möge

$$\mathsf{A} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\, du'_\lambda\, du'_\mu \equiv \mathsf{A}'$$

werden. Die beiden Koeffizientensysteme sind dann durch die drei Transformationsgleichungen

$$(1.) \qquad a_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \qquad (i,k=1,2)$$

verbunden. Für die Determinanten $|a_{ik}| = a$, $|a'_{\lambda\mu}| = a'$ folgt aus ihnen die Gleichung

$$a = a' \Delta'^2, \tag{2.}$$

in der Δ' die Funktionaldeterminante der Größen u' in bezug auf die Variablen u bedeutet. Versteht man unter A das Quadrat des Linienelements ds einer Fläche, so weiß man aus der Theorie des Krümmungsmaßes, daß es einen aus den Größen a_{11}, a_{12}, a_{22}, ihren ersten Ableitungen nach u_1 und u_2 und drei bestimmten zweiten Ableitungen zusammengesetzten Ausdruck gibt, der bei der Transformation zu beliebigen neuen Variablen in den formell gleichgebildeten übergeht. Es besteht also eine Gleichung

$$f(a_{11}, a_{12}, a_{22}, \frac{\partial a_{11}}{\partial u_1}, \ldots) = f(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, \frac{\partial a'_{11}}{\partial u'_1}, \ldots), \tag{3.}$$

in der f auf beiden Seiten dieselbe Funktion bezeichnet. Größen f, die einer solchen Gleichung genügen und in denen Ableitungen beliebiger Ordnung auftreten mögen, heißen nach einer von *Weierstraß* vorgeschlagenen und von *Weingarten* eingeführten Benennung Biegungsinvarianten. Ihre Ordnung ist gleich der höchsten Ordnung der vorkommenden Differentialquotienten. Hiernach ist das *Gauß*sche Krümmungsmaß eine Biegungsinvariante zweiter Ordnung.

Nun muß man offenbar die *Gauß*sche Invarianz aus den Relationen (1.) und ihren ersten und zweiten Derivierten durch Elimination der Ableitungen erster bis dritter Ordnung der Variablen u' nach den Veränderlichen u herleiten können. Diesen direkten Weg hat *Casorati* in einer Abhandlung eingeschlagen, die zwar hier und da zitiert wird, aber nicht die gebührende Beachtung gefunden hat: „Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve“ (Annali di Matem. t. 3, 4 (1860—61)). In derselben Arbeit hat *Casorati* auch die von einander unabhängigen Biegungsinvarianten 3. und 4. Ordnung hergestellt.

Es läßt sich nicht leugnen, daß die *Casorati*sche Untersuchung nicht in allen Punkten gleich übersichtlich ist. Doch kann man diesem Übelstande leicht dadurch abhelfen, daß man die ersten Derivierten der Gleichungen (1.) in der Form benutzt, die ihnen *Christoffel* in seiner Abhandlung „Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades“ (dieses Journal Bd. 70 (1869), S. 49) gegeben hat.

Will man auf dem von *Casorati* betretenen Wege allgemeine Resultate gewinnen, so erkennt man bald, daß es sich nicht empfiehlt, die Frage nach den Invarianten von der nach den Kovarianten zu trennen. Vielmehr wird man zweckmäßig, wenigstens bis zu einer bestimmten Ordnung hin, das Gesamtsystem der Gleichungen im Auge behalten, aus denen beide Arten von Größen entspringen müssen.

Es bedeute $\varphi(u_1, u_2)$ eine willkürliche Funktion der beiden ursprünglichen Variablen, $\bar{\varphi}(u_1', u_2')$ ihren Wert, in den neuen Veränderlichen dargestellt. Aus

$$\varphi(u_1, u_2) = \bar{\varphi}(u_1', u_2') \tag{4.}$$

ergibt sich durch Differentiation eine unbegrenzte Reihe abgeleiteter Gleichungen, zunächst

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \sum_\lambda \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u_\lambda'} \frac{\partial u_\lambda'}{\partial u_i}. \qquad (i=1,2) \tag{5.}$$

Genügt nun eine Funktion f, die außer den Größen a_{ik} und ihren Ableitungen auch die Differentialquotienten von φ enthält, einer Gleichung der Form (3.), so heißt sie eine Biegungskovariante der Funktion φ. Sie ist von der m-ten Ordnung, wenn Ableitungen m-ter Ordnung dieser Funktion, aber keine höheren, in ihr vorkommen. Solche Biegungskovarianten müssen, ihre Existenz vorausgesetzt, aus den Relationen (1.), (5.) und ihren Derivierten durch Elimination der Ableitungen der Größen u' folgen. Wo im folgenden von Ableitungen ohne weiteren Zusatz die Rede ist, sollen darunter stets die partiellen Differentialquotienten von u_1' und u_2' nach u_1 und u_2 verstanden werden.

Eine einfache Abzählung, die schon *Casorati* vornimmt, gestattet wenigstens einen Schluß auf die ungefähre Anzahl unabhängiger Biegungs-Invarianten und Kovarianten bis zu einer bestimmten Ordnung hin. Um zunächst bei den Invarianten zu bleiben, so gilt die Bemerkung, daß aus jeder der drei Gleichungen (1.) durch die Differentiationen erster Ordnung zwei neue hervorgehen, dann drei usw., für die m-te Ordnung $m+1$. Das System (1.) eingeschlossen, hat man also

$$3(1+2+\cdots+(m+1)) = \frac{3(m+1)(m+2)}{2}$$

Gleichungen, aus denen

$$2(2+3+\cdots+(m+2)) = (m+1)(m+4)$$

Ableitungen der Größen u_1' und u_2' zu eliminieren sind. Diese Elimination ist ausführbar, wenn die erste Zahl größer als die zweite,

$$\frac{(m+1)(m-2)}{2} > 0$$

ist, also von $m=3$ an, und die Zahl auf der linken Seite der Ungleichung würde dann, immer unter Voraussetzung der Darstellbarkeit der Resultanten in der Form (3.), zugleich die gesuchte Anzahl der Biegungsinvarianten bis zur m-ten Ordnung hin angeben. Aber diese Schlüsse gelten, wie *Casorati* selbst hervorhebt, ohne Rücksicht auf die spezielle Natur der Gleichungen (1.), und in der Tat lehrt ja die Theorie des *Gauß*schen Krümmungsmaßes, daß schon für $m=2$ eine Biegungsinvariante existiert. Hiernach hat es zunächst keinen Zweck, solche allgemeinen Erörterungen unter Hinzunahme der Gleichung (4.) und ihrer Derivierten auch auf Biegungskovarianten auszudehnen.

Beginnt man die planmäßige Untersuchung mit den Gleichungen (1.) für sich allein, so sieht man unmittelbar, daß es nicht möglich ist, die vier partiellen Ableitungen $\frac{\partial u_1'}{\partial u_1}$, $\frac{\partial u_1'}{\partial u_2}$, $\frac{\partial u_2'}{\partial u_1}$, $\frac{\partial u_2'}{\partial u_2}$ aus ihnen zu eliminieren. Es gibt also sicher keine Biegungsinvariante der Ordnung Null.

Die Hinzunahme der Gleichung (4.) führt nicht weiter, es existiert also auch keine Biegungskovariante 0-ter Ordnung.

Nimmt man dagegen, ohne vorerst über die Differentialquotienten erster Ordnung der Größen u' hinauszugehen, die Gleichungen (5.) hinzu, so kann man die Elimination der vier Ableitungen aus dem System der fünf Gleichungen (1.), (5.) ausführen. Dabei ergibt sich das Resultat in sehr übersichtlicher Form, wenn beachtet wird, daß aus (5.) das System

$$(6.) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\frac{\partial \varphi}{\partial u_k} = \sum_{\lambda,\mu} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_\lambda'}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_\mu'}\frac{\partial u_\lambda'}{\partial u_i}\frac{\partial u_\mu'}{\partial u_k} \qquad (i,k=1,2)$$

hergeleitet werden kann, und daß umgekehrt diese drei Relationen auf (5.) zurückführen. Es sind die Transformationsgleichungen für die quadratische Differentialform

$$\sum_{i,k} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}\, du_i\, du_k = d\varphi^2.$$

Ihre Zusammenstellung mit (1.) liefert die Invarianz (im algebraischen Sinne)

$$(7.) \qquad \sum_{i,k} a_{ik}\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\frac{\partial \varphi}{\partial u_k} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_\lambda'}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_\mu'}$$

als Resultat der Elimination der Ableitungen aus (1.) und (6.) oder (1.) und (5.). Es bedarf kaum der Erwähnung, daß von der zweiten algebraischen absoluten Invariante des Formenpaares $(\mathsf{A}, d\varphi^2)$ hier wegen des Verschwindens der Determinante von $d\varphi^2$ nicht die Rede ist. D. h. es gibt *eine* Biegungskovariante erster Ordnung, die keine Ableitungen der Größen a_{ik} enthält, nämlich die Größe

$$H_a(\mathsf{A}, d\varphi^2) = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} = \frac{a_{22}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)^2 - 2\,a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + a_{11}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right)^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}.$$

Sie ist mit dem *Beltrami*schen Differentialparameter erster Ordnung der Funktion φ in bezug auf die Form A identisch, so daß man die Gleichung (7.) auch schreiben kann:

$$(8.) \qquad \Delta_a^1 \varphi = \Delta_{a'}^1 \overline{\varphi}.$$

Behufs Einführung der Ableitungen zweiter Ordnung der Größen u' differentiieren wir jetzt die Gleichungen (1.). Vermöge der dabei entstehenden 2.3 Formeln

$$(9.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} = \sum\limits_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu} \dfrac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \dfrac{\partial^2 u'_\mu}{\partial u_k \partial u_l} + \sum\limits_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu} \dfrac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \dfrac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_l} \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{\lambda,\mu,\nu} \dfrac{\partial a'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu} \dfrac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \dfrac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \dfrac{\partial u'_\nu}{\partial u_l} \end{cases}$$

können die sechs partiellen Ableitungen zweiter Ordnung als explizite Funktionen der ersten Differentialquotienten dargestellt werden. Die Koeffizienten dieser Darstellung sind die jetzt so genannten *Christoffel*schen Verbindungen aus den Koeffizienten der Form A und ihren ersten Ableitungen und die in gleicher Weise aus den Koeffizienten von A' gebildeten Ausdrücke. Man kann diese einfache und wichtige, von *Christoffel* a. a. O. bewiesene Tatsache auf dem landläufigen Wege der Auflösung der Gleichungen (9.) dartun, ohne einen Kunstgriff anzuwenden oder auch nur den invarianten Charakter der dabei auftretenden Gleichungen von vornherein ins Auge zu fassen. Es genügt, dazu folgendes zu bemerken:

Vertauscht man, unter Benutzung der Gleichung $a'_{\mu\lambda} = a'_{\lambda\mu}$, auf der rechten Seite von (9.) λ mit μ in der ersten Summe, so erhält man dafür

$$\sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_i} \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_k \partial u_l}.$$

Um sodann eine der beiden Summen, die sich auf die zweiten Ableitungen von u'_λ beziehen, zu isolieren, wird man der Formel (9.) diejenigen an die Seite stellen, die aus ihr durch Vertauschung von i mit l und von k mit l hervorgehen, also links $\frac{\partial a_{lk}}{\partial u_i}$ und $\frac{\partial a_{il}}{\partial u_k}$ enthalten, und hierauf die Verbindung $\frac{\partial a_{kl}}{\partial u_i}+\frac{\partial a_{il}}{\partial u_k}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l}$ bilden. Nach einer Vertauschung von λ mit ν in der ersten, μ mit ν in der zweiten der drei dreifachen Summen auf der rechten Seite der entstehenden Gleichung, und nachdem zur Abkürzung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial u_i}+\frac{\partial a_{il}}{\partial u_k}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l}\right)=\begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} \tag{10.}$$

und entsprechend

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a'_{\mu\nu}}{\partial u'_\lambda}+\frac{\partial a'_{\lambda\nu}}{\partial u'_\mu}-\frac{\partial a'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu}\right)=\begin{bmatrix} \lambda\,\mu \\ \nu \end{bmatrix}'$$

gesetzt ist, erhält man die Formel

$$\begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix}=\sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_l}\,\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i\,\partial u_k}+\sum_{\lambda,\mu,\nu}\begin{bmatrix} \lambda\,\mu \\ \nu \end{bmatrix}'\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\,\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\,\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}. \tag{11.}$$

Die zweiten partiellen Ableitungen ergeben sich nunmehr einzeln mittels elementarer Relationen der Determinantentheorie. Wird $\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}$ mit $s_{\lambda i}$ bezeichnet, und ist σ_{pq} die in der Determinante $|s_{\lambda i}|=s$ zu dem Element s_{pq} gehörige, durch s selbst dividierte Unterdeterminante, hat ferner, wie schon in der Gleichung (7.), α'_{pq} dieselbe Bedeutung für a'_{pq}, betrachtet als Element der Determinante a', so liefert die Multiplikation von (11.) mit $\alpha'_{\varrho h}\sigma_{\varrho l}$ und Summation über ϱ und l die Gleichungen

$$\sum_{\varrho,l}\alpha'_{\varrho h}\,\sigma_{\varrho l}\begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix}=\frac{\partial^2 u'_h}{\partial u_i\,\partial u_k}+\sum_{\lambda,\mu,\nu}\alpha'_{\nu h}\begin{bmatrix} \lambda\,\mu \\ \nu \end{bmatrix}'s_{\lambda i}\,s_{\mu k}.$$

Vermöge der aus (1.), nämlich

$$a_{ik}=\sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\,s_{\lambda i}\,s_{\mu k}$$

folgenden Transformationsgleichungen für die Größen α_{ik},

$$\alpha_{ik}=\sum_{\lambda,\mu}\alpha'_{\lambda\mu}\,\sigma_{\lambda i}\,\sigma_{\mu k}, \tag{12.}$$

wird nun

$$\sum_k \alpha_{ik}\,s_{hk}=\sum_\lambda \alpha'_{\lambda h}\,\sigma_{\lambda i},$$

und demnach

$$\sum_{\varrho,l}\alpha'_{\varrho h}\,\sigma_{\varrho l}\begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix}=\sum_{l,m}\alpha_{lm}\,s_{hm}\begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix}.$$

Setzt man also noch

$$\sum_l a_{lm} \begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix}, \tag{13.}$$

so kann man die aus (11.) abgeleiteten Gleichungen, nachdem man die partiellen Ableitungen erster Ordnung als solche wieder eingeführt hat, in der Form schreiben:

$$\frac{\partial^2 u'_h}{\partial u_i \partial u_k} - \sum_\nu \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial u'_h}{\partial u_\nu} = - \sum_{\lambda,\mu} \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ h \end{Bmatrix}' \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}. \tag{14.}$$

Dies sind die *Christoffel*schen Formeln. Sie bleiben bei einer Vertauschung der Differentiationen nach u_i und u_k ungeändert.

Die Tatsache, daß die Gleichungen (9.) in die Form (14.), und umgekehrt, übergeführt werden können, läßt am deutlichsten hervortreten, daß es nicht möglich ist, die Differentialquotienten zweiter Ordnung der Variablen u' zu eliminieren. Man kann also auch keine Relation zwischen den Größen a_{ik}, $a'_{\lambda\mu}$ und ihren ersten Ableitungen herstellen, d. h. es gibt keine Biegungsinvariante erster Ordnung.

II.

Anders verhält es sich für die nächste Ordnung, bei der die Anzahl der abgeleiteten Gleichungen die der hinzutretenden Ableitungen um eine Einheit übertrifft. Denn aus I (1.) entstehen 3.3 Derivierte zweiter Ordnung, während 2.4 Differentialquotienten dritter Ordnung der Größen u' vorhanden sind. Wenn also diese bei der Elimination nicht etwa gruppenweise wegfallen, so entsteht *eine* neue Gleichung, die sich nach Entfernung der zweiten Ableitungen mittels der Gleichungen I (14.) als eine Relation zwischen den ersten und zweiten Differentialquotienten der Formenkoeffizienten a_{ik} und $a'_{\lambda\mu}$ und den ersten Ableitungen der Variablen u' darstellt. Diese Relation ist dann mit den bereits vorliegenden behufs Elimination der letztgenannten Größen zusammenzustellen.

Die Operationen, die man zur wirklichen Ausführung der Elimination vorzunehmen hat, bleiben am übersichtlichsten, wenn man von den Gleichungen I (9.) ausgeht, ohne mit diesen eine andere Umformung vorzunehmen als die vorhin zuerst angedeutete, die auf

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\left(\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_i}\,\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_k \partial u_l} + \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\,\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_l}\right) + \sum_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial a'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu}\,\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\,\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\,\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}$$

führt. Differentiiert man nach u_m und faßt das Bildungsgesetz des entstehenden Ausdruckes in bezug auf die Ableitungen dritter Ordnung ins Auge, so übersieht man auf den ersten Blick, daß man das vollständige Resultat der Elimination dieser Größen, auch für $n > 2$, dadurch erhält, daß man

$$\frac{\partial^2 a_{il}}{\partial u_k \partial u_m} + \frac{\partial^2 a_{km}}{\partial u_i \partial u_l} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial u_l \partial u_m} - \frac{\partial^2 a_{lm}}{\partial u_i \partial u_k}$$

bildet. Hierbei treten Glieder von verschiedener Gestalt auf, und zwar zuerst solche, die in den zweiten Differentialquotienten der Variablen u' von der zweiten Dimension sind und sich in der Form

$$2\sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\left(\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_k}\,\frac{\partial^2 u'_\mu}{\partial u_l \partial u_m} - \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_l}\,\frac{\partial^2 u'_\mu}{\partial u_k \partial u_m}\right)$$

darstellen. Ersetzt man die Ableitungen durch ihre Werte aus den *Christoffel*schen Formeln, so erhält man hieraus folgende Gruppen von Ausdrücken:

(A.)
$$\begin{aligned} &2\sum_{\lambda,\mu,\sigma,\tau} a'_{\lambda\mu}\left(\left\{\begin{matrix} ik \\ \sigma \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} lm \\ \tau \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} il \\ \sigma \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} km \\ \tau \end{matrix}\right\}\right)\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_\sigma}\,\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_\tau} \\ &= 2\sum_{\sigma,\tau} a_{\sigma\tau}\left(\left\{\begin{matrix} ik \\ \sigma \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} lm \\ \tau \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} il \\ \sigma \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} km \\ \tau \end{matrix}\right\}\right) \end{aligned}$$

nach Benutzung der Gleichungen I (1.);

(B.)
$$\begin{aligned} &2\sum_{\sigma,\tau,\lambda,\mu,\nu,\varrho} a'_{\sigma\tau}\left(\left\{\begin{matrix} \lambda\mu \\ \sigma \end{matrix}\right\}'\left\{\begin{matrix} \nu\varrho \\ \tau \end{matrix}\right\}' - \left\{\begin{matrix} \lambda\nu \\ \sigma \end{matrix}\right\}'\left\{\begin{matrix} \mu\varrho \\ \tau \end{matrix}\right\}'\right)\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\,\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\,\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}\,\frac{\partial u'_\varrho}{\partial u_m} \\ &= 2\sum_{\sigma,\tau,\lambda,\mu,\nu,\varrho} a'_{\sigma\tau}\left(\left[\begin{matrix} \lambda\mu \\ \sigma \end{matrix}\right]'\left[\begin{matrix} \nu\varrho \\ \tau \end{matrix}\right]' - \left[\begin{matrix} \lambda\nu \\ \sigma \end{matrix}\right]'\left[\begin{matrix} \mu\varrho \\ \tau \end{matrix}\right]'\right)\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\,\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\,\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}\,\frac{\partial u'_\varrho}{\partial u_m} \end{aligned}$$

bei Anwendung der Relationen I (13.) oder der mit ihnen gleichbedeutenden

$$\sum_m a_{lm}\left\{\begin{matrix} ik \\ m \end{matrix}\right\} = \left[\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right],$$

die in gleicher Weise für die transformierten Größen gelten.

Eine dritte Gruppe enthält die *Christoffel*schen Verbindungen sowohl aus den Koeffizienten a_{ik} wie aus den transformierten Größen $a'_{\lambda\mu}$ zusammengesetzt. Dieses Aggregat hebt sich aber gegen eines, das aus den in den zweiten Ableitungen linearen Gliedern hervorgeht, welche sich in der Form

$$2\sum_{\lambda,\mu,\nu}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \lambda\end{bmatrix}'\Big(\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_l}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_m}\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i\,\partial u_k}+\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_k}\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_l\,\partial u_m}$$
$$-\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_m}\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i\,\partial u_l}-\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_k\,\partial u_m}\Big)$$

schreiben lassen. Aus diesen Gliedern erhält man außerdem noch ein Aggregat:

$$\text{(C.)}\qquad 4\sum_{\sigma,\tau,\lambda,\mu,\nu,\varrho}\alpha'_{\sigma\tau}\Big(\begin{bmatrix}\lambda\nu\\ \sigma\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mu\varrho\\ \tau\end{bmatrix}'-\begin{bmatrix}\lambda\mu\\ \sigma\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\nu\varrho\\ \tau\end{bmatrix}'\Big)\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}\frac{\partial u'_\varrho}{\partial u_m}.$$

Endlich können die Glieder, in denen die zweiten Ableitungen der Größen u' von vornherein nicht vorkommen, in die Summe

$$\text{(D.)}\qquad \sum_{\lambda,\mu,\nu,\varrho}\Big(\frac{\partial^2 a'_{\lambda\nu}}{\partial u'_\mu\,\partial u'_\varrho}+\frac{\partial^2 a'_{\mu\varrho}}{\partial u'_\lambda\,\partial u'_\nu}-\frac{\partial^2 a'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu\,\partial u'_\varrho}-\frac{\partial^2 a'_{\nu\varrho}}{\partial u'_\lambda\,\partial u'_\mu}\Big)\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}\frac{\partial u'_\varrho}{\partial u_m}$$

zusammengezogen werden. Nachdem man noch (B.) gegen einen Teil von (C.) gehoben hat, läßt sich die durch Elimination der zweiten und dritten Ableitungen entstehende Gleichung in die Form

$$\text{(1.)}\qquad (imkl)=\sum_{\lambda,\mu,\nu,\varrho}(\lambda\varrho,\mu\nu)'\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}\frac{\partial u'_\varrho}{\partial u_m}$$

setzen, wo

$$\text{(2.)}\quad\begin{cases}(imkl)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 a_{il}}{\partial u_k\,\partial u_m}+\frac{\partial^2 a_{km}}{\partial u_i\,\partial u_l}-\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial u_l\,\partial u_m}-\frac{\partial^2 a_{lm}}{\partial u_i\,\partial u_k}\Big)\\ \qquad\qquad+\sum_{p,q}a_{pq}\Big(\begin{Bmatrix}il\\ p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}km\\ q\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}ik\\ p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}lm\\ q\end{Bmatrix}\Big)\end{cases}$$

ist und $(\lambda\varrho,\mu\nu)'$ für die transformierten Größen die entsprechende Bedeutung hat. Man kommt also auf diesem natürlichen Wege der Elimination der höheren Ableitungen von selbst auf die *Riemann*schen Größen $(imkl)$ und zu der aus den Gleichungen I (1.) folgenden Kovarianz

$$\text{(3.)}\qquad \sum_{i,k,l,m}(imkl)\,du_i\,\delta u_k\,\mathfrak{d}u_l\,\partial u_m=\sum_{\lambda,\mu,\nu,\varrho}(\lambda\varrho,\mu\nu)'\,du'_\lambda\,\delta u'_\mu\,\mathfrak{d}u'_\nu\,\partial u'_\varrho.$$

Für die uns hier allein interessierende Annahme $n=2$ lassen sich bekanntlich die Koeffizienten $(imkl)$ der *Riemann*schen Kovariante auf eine einzige Größe zurückführen, für die man (1212) nehmen kann. Das System (1.) reduziert sich auf die eine Gleichung

$$\text{(4.)}\qquad (1212)=(1212)'\Big(\frac{\partial u'_1}{\partial u_1}\frac{\partial u'_2}{\partial u_2}-\frac{\partial u'_2}{\partial u_1}\frac{\partial u'_1}{\partial u_2}\Big)^2,$$

und die Elimination der Ableitungen kann mit Hilfe der Gleichung I (2.) vollendet werden. An die Stelle der *Riemann*schen Kovarianz tritt dann die *Gauß*sche Invarianz

$$\frac{(1212)}{a} = \frac{(1212)'}{a'} \tag{5.}$$

oder

$$K_a = K_{a'}. \tag{5a.}$$

Hiermit ist die einzige existierende Biegungsinvariante zweiter Ordnung

$$\frac{(1212)}{a} \equiv K_a,$$

die in der Flächentheorie für $A = ds^2$ die Bedeutung des Krümmungsmaßes hat, ermittelt. Im folgenden sollen die Indices a, a' bei K weggelassen und die Gleichung (5.) oder (5a.) in der Form

$$K = K' \tag{6.}$$

benutzt werden.

Die zweiten Ableitungen der Formenkoeffizienten a_{ik} sind in K in der Verbindung

$$\frac{\partial^2 a_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial u_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{22}}{\partial u_1^2} \equiv p$$

enthalten. Man könnte die zu der Invarianz (6.) führende Elimination etwas einfacher anstellen, wenn man sein Augenmerk von Anfang an auf die Herstellung dieser Verbindung richtete. Aber die eigentliche Natur des Eliminationsresultats tritt deutlicher hervor, wenn der Wert der Zahl n nicht von vornherein fixiert wird.

Ferner ist zu bemerken, daß die Rechnung auch dann etwas einfacher wird, wenn man bei der neuen Differentiation von den Gleichungen I (14.) anstatt von I (9.) ausgeht. Doch ist dann eine Erörterung darüber nötig, wie viele der hierbei entstehenden Relationen von einander unabhängig sind, und außerdem erscheint das Ergebnis der Elimination der zweiten und dritten Ableitungen nicht sofort in der übersichtlichen Gestalt (1.).

III.

Nachdem die *Gauß*sche Invarianz einmal bewiesen ist, läßt sich die Form leicht überblicken, in die man beim Fortgange zu den dritten Derivierten der Gleichungen I (1.) das Resultat der Elimination der Ableitungen

zweiter bis vierter Ordnung setzen kann. Die Anzahl der Derivierten dritter Ordnung ist gleich 3.4, die der neu hinzukommenden Ableitungen vierter Ordnung gleich 2.5. Es werden also zwei Resultanten existieren, aus denen noch die zweiten und die unter der Voraussetzung II (6.) ebenfalls eindeutig bestimmten dritten Ableitungen der Größen u' zu entfernen sind. Bildet man nun in den dritten Derivierten der Transformationsgleichungen die Glieder, die die höchsten Ableitungen der Variablen enthalten, so bemerkt man sofort, daß man solche Differentialquotienten nur durch Herstellung der Verbindungen

$$\frac{\partial^3 a_{12}}{\partial u_1^2\,\partial u_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 a_{11}}{\partial u_1\,\partial u_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 a_{22}}{\partial u_1^3},$$

$$\frac{\partial^3 a_{12}}{\partial u_1\,\partial u_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 a_{11}}{\partial u_2^3} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 a_{22}}{\partial u_1^2\,\partial u_2}$$

eliminieren kann. Die Form dieser Ausdrücke lehrt zugleich, daß die beiden so entstehenden Resultanten von einander unabhängig sind. Die Ausdrücke selbst stimmen mit den Ableitungen $\frac{\partial p}{\partial u_1}$ und $\frac{\partial p}{\partial u_2}$ überein, die auch auftreten, wenn man II (6.) nach u_1 und u_2 differentiiert, also

$$\frac{\partial K}{\partial u_i} = \sum_\lambda \frac{\partial K'}{\partial u_\lambda'}\frac{\partial u_\lambda'}{\partial u_i} \qquad (i=1,2) \tag{1.}$$

bildet. Da nun endlich diese Gleichungen auch aus I (1.) durch fortgesetzte Differentiationen hervorgegangen sind, Ableitungen zweiter und dritter Ordnung aber nicht enthalten, so müssen sie, wie auch *Casorati* bemerkt, mit dem Resultat der Elimination aller Ableitungen der Größen u', bis auf die der ersten Ordnung, aus dem Gesamtsystem der bis jetzt betrachteten Derivierten äquivalent sein. Die vier ersten Differentialquotienten sind schließlich aus den fünf Gleichungen (1.) und I (1.) zu eliminieren. Und da die Gleichungen (5.) des § I für $\varphi = K$, $\overline{\varphi} = K'$ in die obigen (1.) übergehen, so ergibt sich aus dem dort bemerkten, daß sich das Eliminationsresultat in die invariante Form

$$\sum_{i,k} a_{ik}\frac{\partial K}{\partial u_i}\frac{\partial K}{\partial u_k} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\frac{\partial K'}{\partial u'_\lambda}\frac{\partial K'}{\partial u'_\mu}$$

oder

$$\Delta_a^1 K = \Delta_{a'}^1 K' \tag{2.}$$

setzen läßt. D. h. es existiert *eine* Biegungsinvariante dritter Ordnung, der Differentialparameter erster Ordnung der *Gauß*schen Invariante.

Bis jetzt ist also folgendes festgestellt: Aus den drei Transformationsgleichungen I (1.) und ihren $6+9+12$ Derivierten erster, zweiter und dritter Ordnung, zusammen 30 Gleichungen, die $4+6+8+10=28$ Ableitungen der Größen u' enthalten, ergeben sich durch deren Elimination, soweit eine solche möglich ist, so viele Resultanten wie theoretisch existieren können, nämlich zwei. Es sind die Gleichungen II (6.) und die eben aufgestellte (2.). Eine von ihnen, die erste, resultiert schon durch Elimination der Ableitungen erster bis dritter Ordnung aus den Transformationsgleichungen und ihren ersten und zweiten Derivierten, obgleich die Anzahl der Ableitungen und die der Gleichungen übereinstimmend gleich 18 ist. Daß trotzdem, wenn man einen Schritt weiter geht, nicht $12-10=2$ neue Resultanten hinzukommen können, sondern nur eine, wird noch deutlicher, wenn zuerst das System der 27 Derivierten für sich betrachtet und aus ihm die 24 Differentialquotienten zweiter, dritter und vierter Ordnung eliminiert werden. Von den drei Resultanten, die dann noch die ersten Differentialquotienten enthalten, ist eine mit II (4.) identisch, während die zwei anderen mit den obigen Gleichungen III (1.) übereinkommen. Daß dann II (4.) mit I (1.) allein, ohne Hinzuziehung von III (1.), eine Resultante liefert, liegt eben daran, daß in der erstgenannten Gleichung die Ableitungen nur in der Verbindung $\frac{\partial(u_1', u_2')}{\partial(u_1, u_2)}$ vorkommen, für die auch aus I (1.) eine im übrigen nur die Größen a_{ik} und $a'_{\lambda\mu}$ enthaltende Gleichung, nämlich I (2.), hergestellt werden kann.

Um nun zu den Biegungskovarianten zurückzukehren, müssen wir vor allem die beiden Gleichungen I (5.) mit denen zusammenstellen, die nach Elimination der höheren Differentialquotienten die ersten Ableitungen noch enthalten. Nach Erledigung der Gleichung II (4.), die auf die Invarianz II (6.) geführt hat, waren dies die Gleichungen I (1.) und III (1.), die mit I (5.) zusammen 7 Relationen liefern. Zwei der drei Resultanten, die aus ihnen durch Entfernung der vier Ableitungen erster Ordnung hervorgehen, sind bereits aufgestellt worden, nämlich I (8.) und III (2.). Was noch fehlt, ergibt sich in der für den vorliegenden Zweck brauchbarsten Gestalt, wenn man beachtet, daß aus I (5.) und III (1.) die Formeln

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\frac{\partial K}{\partial u_k} = \sum_{\lambda,\mu} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'_\lambda}\frac{\partial K'}{\partial u'_\mu}\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k},$$

also die Transformationsgleichungen für die quadratische Differentialform $d\varphi\, dK$, abgeleitet werden können, und wenn man dann die beiden absoluten

simultanen Invarianten des Formenpaares $(\mathsf{A}, d\varphi\, dK)$ bildet. Eine von ihnen,

$$\sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial K}{\partial u_k} \equiv H_a(\mathsf{A}, d\varphi\, dK),$$

stimmt mit dem *Beltrami*schen Zwischenparameter $\Delta_a(\varphi, K)$ überein, die andere steht in unmittelbarem Zusammenhange mit der Funktionaldeterminante der beiden Funktionen φ und K, deren Kovarianz natürlich auch aus I (5.) und III (1.) selbst ohne weiteres abgelesen werden kann. Man erhält also auf diesem Wege die beiden Kovarianzen

$$\Delta_a(\varphi, K) = \Delta_{a'}(\bar{\varphi}, K'), \tag{3.}$$

$$D_a(\varphi, K) = \Delta_{a'}(\bar{\varphi}, K'), \tag{4.}$$

die aber mit I (8.) und III (2.) zusammen wegen der Relation

$$D_a(\varphi, K)^2 = \Delta_a^1 \varphi \,.\, \Delta_a^1 K - \Delta_a(\varphi, K)^2 \tag{5.}$$

nur drei unabhängige Gleichungen liefern.

Der Zwischenparameter der willkürlichen Funktion φ und der speziellen Funktion K gewinnt hier eine besondere Bedeutung. Er erscheint als Biegungskovariante erster Ordnung von φ, deren Koeffizienten freilich Ableitungen der Formenkoeffizienten a_{ik} bis zur dritten Ordnung hin enthalten.

Da nun die Ableitungen von φ in $\Delta_a(\varphi, K)$ und $D_a(\varphi, K)$ linear vorkommen, in $\Delta_a^1 \varphi$ dagegen in der zweiten Dimension, so ist es zweckmäßiger, die Gleichungen (3.) und (4.) zusammen beizubehalten und dafür die zuerst gefundene Kovarianz I (8.) wegzulassen, anstatt zu dieser eine der beiden neuen Gleichungen hinzuzunehmen.

Von der Form der Biegungskovarianten erster Ordnung abgesehen, ist das Hauptergebnis dieser Untersuchung, daß ebensoviele unabhängige Kovarianten wie Ableitungen der Funktion φ existieren. Es steht zu erwarten, daß diese Übereinstimmung in der Anzahl für jede beliebige Ordnung gelten wird. Für $m = 2$ sind

$$D_a(\Delta_a^1 \varphi, K) \quad \text{und} \quad \Delta_a(\Delta_a^1 \varphi, K)$$

Biegungskovarianten. Zu ihnen tritt der *Beltrami*sche Differentialparameter zweiter Ordnung. Von dem hier eingenommenen Standpunkt aus erscheint er als simultane Invariante der Form A und ihrer *Christoffel*schen Kovariante

$$\sum_{i,k} \varphi_{ik}\, du_i\, du_k \equiv \Phi_a,$$

deren Koeffizienten durch die Ausdrücke

$$(6.)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i\, \partial u_k} - \sum_{\nu} \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\nu} = \varphi_{ik}$$

definiert sind und deren Kovarianteneigenschaft, wie bekannt, unmittelbar aus den Formeln I (14.) folgt. Es ist

$$(7.)\qquad \Delta_a^2 \varphi = \sum_{i,k} \alpha_{ik}\, \varphi_{ik} = H_a(\mathsf{A}, \Phi_a).$$

Um von diesen drei in den Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1\, \partial u_2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2^2}$$

linearen Biegungskovarianten zweiter Ordnung aus weiter vorschreiten zu können, hat man nur zu beweisen, daß sie hinsichtlich der drei Ableitungen, oder wegen deren eindeutiger Beziehung zu den Koeffizienten der *Christoffel*schen Kovariante

$$\varphi_{11}, \quad \varphi_{12}, \quad \varphi_{22},$$

hinsichtlich dieser Größen von einander unabhängig sind. Nun erhält man, wenn man

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left(a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = \varphi_1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left(a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = \varphi_2$$

setzt und diese Bezeichnung auch für $\varphi = K$ benutzt,

$$D_a(\Delta_a^1 \varphi, K) = -\frac{2}{a}\left[\varphi_2 \frac{\partial K}{\partial v}\, \varphi_{11} - \left(\varphi_1 \frac{\partial K}{\partial v} + \varphi_2 \frac{\partial K}{\partial u}\right)\varphi_{12} + \varphi_1 \frac{\partial K}{\partial u}\right)\varphi_{22}\Big],$$

$$\Delta_a(\Delta_a^1 \varphi, K) = \frac{2}{a}\left[\varphi_2 K_2\, \varphi_{11} - (\varphi_1 K_2 + \varphi_2 K_1)\, \varphi_{12} + \varphi_1 K_1\, \varphi_{22}\right],$$

$$\Delta_a^2 \varphi = \frac{1}{a}(a_{22}\, \varphi_{11} - 2\, a_{12}\, \varphi_{12} + a_{11}\, \varphi_{22}).$$

Die Determinante dieser drei Ausdrücke in bezug auf $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{22}$ hat den Wert

$$\frac{4\, \Delta_a^1 \varphi \,.\, \Delta^1 K}{a^{\frac{3}{2}}},$$

ist also von Null verschieden.

IV.

Angenommen nun, es gebe für die $(m-1)$-te Ordnung m von einander unabhängige Biegungskovarianten der Funktion φ, die in bezug auf die m Ableitungen

$$\frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial u_1^{m-1}} \equiv \varphi^{(m-1,\,0)}, \qquad \frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial u_1^{m-2}\partial u_2} \equiv \varphi^{(m-2,\,1)}, \ldots \frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial u_2^{m-1}} \equiv \varphi^{(0,\,m-1)}$$

linear sind. Sie mögen mit $F_1, \ldots F_m$ bezeichnet werden, und es sei

$$l_{\mu 1}\varphi^{(m-1,\,0)} + l_{\mu 2}\varphi^{(m-2,\,1)} + \cdots + l_{\mu m}\varphi^{(0,\,m-1)}$$

der Teil von F_μ, der die höchsten Ableitungen enthält. Die Unabhängigkeit der Funktionen F findet darin ihren Ausdruck, daß die Funktionaldeterminante von $F_1, \ldots F_m$ in bezug auf die Ableitungen $(m-1)$-ter Ordnung, also die Determinante

$$|l_{\mu\nu}| \equiv l \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots m)$$

nicht Null ist. Ersetzt man in $D_a(\varphi, K)$ und $\Delta_a(\varphi, K)$ die Funktion φ durch solche Biegungskovarianten, so bekommt man neue Kovarianten, und zwar von der m-ten Ordnung. Wir substituieren sämtliche Größen F_μ der Reihe nach etwa in $D_a(\varphi, K)$ und nehmen für eine von ihnen, F_λ, den Ausdruck $\Delta_a(\varphi, K)$ hinzu. Wird

$$D_a(\varphi, K) = \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

$$\Delta_a(\varphi, K) = \alpha'\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \beta'\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

gesetzt, so ergibt sich nach einer Rechnung, die nicht im einzelnen beschrieben zu werden braucht, für die Funktionaldeterminante von

$$\Delta_a(F_\lambda, K),\ D_a(F_1, K), \ldots D_a(F_m, K)$$

in bezug auf die Ableitungen

$$\varphi^{(m,\,0)},\ \varphi^{(m-1,\,1)}, \ldots \varphi^{(0,\,m)}$$

der Wert

$$\begin{vmatrix} \alpha' l_{\lambda 1}, & \alpha' l_{\lambda 2} + \beta' l_{\lambda 1}, & \ldots \alpha' l_{\lambda m} + \beta' l_{\lambda, m-1}, & \beta' l_{\lambda m} \\ \alpha\, l_{11}, & \alpha\, l_{12} + \beta\, l_{11}, & \ldots \alpha\, l_{1m} + \beta\, l_{1, m-1}, & \beta\, l_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha\, l_{m1}, & \alpha\, l_{m2} + \beta\, l_{m1}, & \ldots \alpha\, l_{mm} + \beta\, l_{m, m-1}, & \beta\, l_{mm} \end{vmatrix},$$

oder ausgerechnet

$$-(\alpha\beta'-\beta\alpha')\,l(l_{\lambda 1}\beta^{m-1}-l_{\lambda 2}\beta^{m-2}\alpha+l_{\lambda 3}\beta^{m-3}\alpha^2-\cdots+(-1)^{m-1}l_{\lambda m}\alpha^{m-1}).$$

Von den drei Faktoren ist der erste, $\alpha\beta'-\beta\alpha'$, gleich $\frac{1}{T}\Delta^1 K$, also nicht Null. Der zweite, l, ist der Annahme nach von Null verschieden. Der dritte kann sicher nicht für jeden Wert von λ aus der Reihe $1,\ldots m$ verschwinden, weil sonst die Determinante der m in den m Potenzen und Potenzprodukten β^{m-1}, $-\beta^{m-2}\alpha$, $\beta^{m-3}\alpha^2$, ... homogenen linearen Funktionen gleich Null sein müßte. Diese Determinante hat aber den Wert l.

Da es nun für $m=2$ drei unabhängige Biegungskovarianten von der vorausgesetzten Beschaffenheit gibt, so ist hiermit bewiesen, daß auch für eine beliebige Ordnung m die Anzahl der Biegungskovarianten die Zahl m um eine Einheit übertrifft.

Nun handelt es sich endlich noch um die Anzahl der Biegungsinvarianten für eine beliebige Ordnung.

Setzt man in $D_a(\varphi, K)$ und $\Delta_a(\varphi, K)$

$$\varphi=\Delta_a^1 K$$

ein und nimmt $\Delta_a^2 K$ hinzu, so bekommt man drei Biegungsinvarianten vierter Ordnung, die von einander unabhängig sein müssen. Zwar genügt hierfür nicht ohne weiteres die vorhin bewiesene Unabhängigkeit der drei Größen in bezug auf die zweiten Ableitungen von K, weil K nicht, wie φ, eine willkürliche Funktion ist. Aber die vierten Ableitungen der Formenkoeffizienten kommen nur in den Verbindungen $\frac{\partial^2 p}{\partial u_1^2}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial u_1\,\partial u_2}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial u_2^2}$ vor, und diese können aus den drei angenommenen Biegungsinvarianten nicht eliminiert werden. Ebensowenig ist die Elimination der höchsten Ableitungen möglich, wenn man nach dem oben für φ auseinandergesetzten Verfahren aus den 3 Invarianten 4. Ordnung 4 neue von der 5. Ordnung und sukzessive m von der $(m+1)$-ten Ordnung herleitet. Nur bleibt eben deshalb, weil die Verbindung p, auf die sich diese Schlüsse stützen, bloß bestimmte Ableitungen 2. Ordnung enthält, die Frage offen, ob es nicht noch andere, von den auf diesem Wege gefundenen unabhängige Invarianten gibt. Daß dies nicht sein kann, lehrt die Zusammenstellung der bisher ermittelten Gesamtanzahl der Biegungs-Invarianten und Kovarianten mit der theoretisch zu erwartenden Anzahl aller Resultanten; nach Erledigung der Spezialfälle in

den vorhergehenden Abschnitten ist diese Vergleichung geeignet, eine Einsicht zu vermitteln.

Die Anzahl der aus den Transformationsgleichungen I (1.) hervorgehenden Derivierten bis zur $(m-1)$-ten Ordnung ist

$$3(1+2+\cdots+m)=\frac{3m(m+1)}{2}.$$

Die Gleichung $\varphi(u_1, u_2)=\bar{\varphi}(u_1', u_2')$ läßt mittels der Differentiationen bis zur m-ten Ordnung

$$2+3+\cdots+(m+1)=\frac{m(m+3)}{2}$$

Gleichungen entstehen. Aus der Gesamtheit dieser $m(2m+3)$ Relationen müssen alle Invarianzen bis zur $(m-1)$-ten Ordnung und alle Kovarianzen bis zur m-ten Ordnung durch Elimination der Ableitungen der Größen u' bis zur m-ten Ordnung folgen, deren Anzahl ist

$$2(2+3+\cdots+(m+1))=m(m+3).$$

Die Differenz der beiden Zahlen ist gleich m^2; sie gibt auch, wie aus unseren Ergebnissen leicht zu folgern, die Anzahl der Resultanten wirklich an.

Andererseits sind

$$2+3+\cdots+(m+1)=\frac{m(m+3)}{2}$$

Biegungskovarianten 1. bis m-ter Ordnung und

$$1+1+3+4+\cdots+(m-2)=\frac{m(m-3)}{2}$$

Biegungsinvarianten 2. bis $(m-1)$-ter Ordnung gefunden worden. Da die Gesamtanzahl m^2 mit der der Resultanten übereinstimmt, so ist die ermittelte Anzahl unabhängiger Biegungsinvarianten vollständig.

Das Endergebnis ist hiernach, daß *eine* Biegungsinvariante 2. Ordnung, *eine* 3. Ordnung und für $m>3$ $m-1$ unabhängige Biegungsinvarianten m-ter Ordnung existieren, während die Anzahl unabhängiger Biegungskovarianten für jede Ordnung m gleich $m+1$ ist.

Berlin, Juli 1905.

Über die arithmetische Reihe.

Von Herrn *Michael Bauer* in Budapest.

Im folgenden soll ein einfacher, wenn auch nicht elementarer Beweis der Tatsache gegeben werden, daß die Reihe $nt-1$ unendlich viele Primzahlen enthält. (Die Zahl n ist eine beliebige positive zusammengesetzte Zahl.) Der Beweis stützt sich auf die von *Lejeune Dirichlet* in seiner Habilitationsschrift gegebenen Sätze.

I.

1. Eine positive Primzahl p ist ein Primteiler der Form

$$\Phi(z)=c_0 z^m + c_1 z^{m-1} + \cdots + c_m, \tag{1.}$$

wenn die Kongruenz

$$\Phi(z)\equiv 0 \pmod{p}$$

eine rationale ganze Wurzel besitzt. Nun werden wir den folgenden Hilfssatz beweisen. *Haben die Primteiler der Form* (1.) — *mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen* — *die Gestalt* $at\pm 1$ *und besitzt die Gleichung*

$$\Phi(z)=0 \tag{I.}$$

eine reelle Wurzel, deren Multiplizität ungerade ist, dann sind unter den Primteilern unendlich viele vorhanden, welche $\equiv -1$ *(mod. a) ausfallen.*

2. Wenn die Gleichung (I.) die angegebene Eigenschaft hat, so kann eine *rationale* Zahl

$$\xi=\frac{r}{R}, \qquad R>0$$

(r, R ganz)

gefunden werden, für welche

$$R^m \Phi\left(\frac{r}{R}\right) < 0$$

ist, eine Tatsache, welche noch in der folgenden Weise ausgedrückt werden kann. Die Form

(2.) $$\Psi(z) = c_0 z^m + c_1 R z^{m-1} + \cdots + c_m R^m$$

besitzt die Eigenschaft:

(2*.) $$\Psi(r) < 0.$$

Die Untersuchung der Primteiler wird sehr einfach, wenn wir noch die Form

(3.) $$H(z) = \frac{\Psi(-\Psi(r)z + r)}{-\Psi(r)} = H_0 z^m + H_1 z^{m-1} + \cdots + H_m$$

einführen, deren Koeffizienten rationale ganze Zahlen sind und den Bedingungen

(3*.) $$H_0 > 0, \qquad H_m = -1$$

genügen.

3. Die Primteiler der Form H sind auch Primteiler der Form Ψ. Wie aber aus der Identität

(J.) $$c_0 (zR)^m + c_1 R (zR)^{m-1} + \cdots + c_m R^m = R^m (c_0 z^m + c_1 z^{m-1} + \cdots + c_m)$$

hervorgeht, sind die gegen R relativ primen Primteiler der Formen Ψ und Φ identisch; infolgedessen haben die Primteiler der Form H — mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen — die Gestalt $at \pm 1$. Es sei Q das Produkt der Ausnahmezahlen. Dann besteht für eine genügend große Zahl $\bar{z}$ die Relation

(4.) $$0 < H(aQT\bar{z}) \equiv -1 \pmod{aQT},$$

in welcher T eine beliebige positive ganze rationale Zahl ist. Aus (4.) tritt der Hilfssatz in Evidenz.

II.

1. Es sei

$$F_n(z) = 0$$

die Gleichung der n-ten primitiven Einheitswurzeln, dann ist

$$(x-y)^{\varphi(n)} F_n\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = G_n(x, y^2)$$

eine ganze, ganzzahlige Form ihrer Argumente. Es bedeutet $\varphi(n)$ das bekannte *Euler*sche Zeichen. Nun hat *Kronecker**) den folgenden Satz bewiesen, dessen spezielle Fälle schon von *Dirichlet* in der genannten Schrift entwickelt sind.

Ist q ein Primteiler der Form

(1.) $$G_n(x, s),$$

welcher gegen n und s relativ prim ist, so hat man

$$q \equiv \left(\frac{s}{q}\right) \pmod{n},$$

wo $\left(\frac{s}{q}\right)$ das Legendresche Zeichen bedeutet. Der *Kronecker*sche Beweis ist elementar, er ist sogar im Bereiche der rationalen Zahlen und Formen geführt.**)

2. Nun kann unser Beweis sehr leicht geführt werden. Die Wurzeln der Gleichung

(2.) $$G_n(x, s) = 0$$

sind die Zahlen

(2*.) $$\sqrt{s}\,\frac{\varrho+1}{\varrho-1},$$

wo ϱ eine primitive n-te Einheitswurzel bedeutet. Wird also s negativ gewählt, so hat (2.) reelle einfache Wurzeln und so besitzt die Form

(1.) $$G_n(x, s)$$

nach dem vorhergehenden unendlich viele Primteiler von der Gestalt $nt-1$.

3. Der Beweis kann noch anders geführt werden. Wählen wir $s=-1$, dann muß nur gezeigt werden, daß (1.) unendlich viele Primteiler von der Form $4t-1$ besitzt. Nun haben aber die ungeraden Primteiler irgendwelcher Form die Gestalt $4t \pm 1$; da außerdem die Gleichungswurzeln einfach und reell sind, folgt die zu beweisende Tatsache.

---

*) Über die arithmetischen Sätze usw. Berliner Sitzungsberichte 1888, S. 417—423. Die fraglichen Formen wurden vielfach untersucht.

**) In der genannten Arbeit ist nicht explizit angeführt, daß q relativ prim gegen s ist. Die Zahl s ist kein Quadrat.

Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie.

Von Herrn *P. Bohl* in Riga.

---

1. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (-n^2 + b\cos t)\,x \qquad (n,\ b \text{ sind Konstanten}) \tag{1.}$$

sowie die allgemeinere

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(t)\cdot x \qquad (\varphi(t) \text{ ist eine periodische Funktion}) \tag{2.}$$

spielen in der theoretischen Astronomie eine wichtige Rolle. Es gibt deshalb eine große Zahl von Arbeiten, welche sich mit diesen Gleichungen beschäftigen. Der Untersuchung kommt dabei der Umstand zu statten, daß die allgemeine Form des Integrals der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten entnommen werden kann.

In seiner Abhandlung*) „Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie“ behandelt *Lindstedt* die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (n^2 - 2\Psi_1)\,x = \Psi_0, \tag{3.}$$

wobei Ψ_1 und Ψ_0 Aggregate aus rein periodischen Gliedern von der Form

$$\Psi_1 = \beta_1\cos(\lambda_1 t + b_1) + \beta_2\cos(\lambda_2 t + b_2)\ldots,$$
$$\Psi_0 = \alpha_1\cos(k_1 t + a_1) + \alpha_2\cos(k_2 t + a_2)\ldots$$

bedeuten. „Wegen der großen Wichtigkeit“ der Differentialgleichung (3.) führt er das Integral derselben „bis auf Glieder vierter Ordnung in bezug

---

*) Petersburg 1883, S. 17.

auf die Koeffizienten in Ψ_0 und Ψ_1" an. Die Methode *Lindstedt*s ist eine bloß formale; dieser Umstand nimmt derselben jedoch bekanntlich keineswegs allen Wert. Eine Verallgemeinerung der Gleichung (3.) wird im zweiten Bande des *Poincaré*schen Werkes „Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste"*) betrachtet. Es findet sich daselbst auf S. 283 die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x \cdot f(t) = \varphi(t) \tag{4.}$$

„où $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont des fonctions de t développables en séries trigonométriques."**) Vorher hat *Poincaré* eine Gleichung behandelt, die in der Hauptsache mit der *reduzierten* Gleichung (3.) übereinstimmt.***) Es ist dies die Gleichung

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x \cdot \varphi(t) = 0, \\ \varphi(t) = 1 + \mu \cdot \psi(t), \qquad \psi(t) = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \sin(\alpha_i t + \beta_i) \\ [A_i, \alpha_i, \beta_i \text{ sind Konstanten; die } \alpha_i \text{ sind unter} \\ \qquad \text{einander nicht kommensurabel}]. \end{array}\right. \tag{5.}$$

Indem *Poincaré* sich auf den vorher von ihm behandelten Fall eines periodischen $\varphi(t)$ bezieht, bemerkt er folgendes bezüglich der Gleichung (5.): „Dans ce cas, les procédés précédents sont encore applicables, mais les séries auxquelles on parvient ainsi, et qu'on peut ordonner suivant les puissances de μ, ne sont plus convergentes, de sorte que ces procédés n'ont plus d'autre valeur que celle que peut posséder, d'après le Chapitre VIII, toute méthode de calcul formel."

Aus dem Gesagten erhellt, daß die Frage nach der allgemeinen Form†) des Integrals der Gleichung (4.) ein nicht geringes Interesse beanspruchen darf. Eine besondere Beachtung verdient dabei der Fall, in

---

*) Paris 1893, S. 283.

**) Diese trigonometrischen Reihen können die Vielfachen *mehrerer* t proportionalen Argumente enthalten.

***) a. a. O. S. 277.

†) Dieser Ausdruck wird hier in ähnlichem Sinne gebraucht wie in der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten.

welchem jede Lösung der Gleichung (4.) zwischen endlichen Grenzen liegt. *Unter dieser Voraussetzung unternehme ich es, in meiner Abhandlung die gestellte Frage zu beantworten.* Was die außerdem noch möglichen Fälle betrifft, so sind die bei ihrer Untersuchung von mir gefundenen Resultate nicht vollständig, und ich verzichte vorläufig auf ihre Besprechung.

2. Ich gehe nun zur Mitteilung der im folgenden entwickelten wesentlichsten Ergebnisse über, ohne damit den Inhalt meiner Abhandlung zu erschöpfen.

Vor allen Dingen wird es nötig sein, die Voraussetzungen bezüglich der Funktionen $f(t)$ und $\varphi(t)$ genauer zu präzisieren. Wir sagen, eine Funktion $\psi(t)$ sei in eine für alle t gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe entwickelbar, wenn $\psi(t)$ durch eine für alle t gleichmäßig konvergente Reihe $u_1+u_2+u_3+\cdots$ dargestellt werden kann, wobei die u-Glieder ganze rationale Funktionen von

$$\cos\frac{2\pi t}{\alpha_\mu}, \qquad \sin\frac{2\pi t}{\alpha_\mu} \qquad (\mu=1,2,\ldots m)$$

($\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ bedeuten m von Null verschiedene Konstanten)

sind. Der Kürze wegen sagen wir in diesem Falle auch, $\psi(t)$ sei eine im weiteren Sinne periodische Funktion mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. $f(t)$ und $\varphi(t)$ seien im weiteren Sinne periodische Funktionen mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$; wir setzen ferner, wie schon angedeutet, voraus, daß jede Lösung der Gleichung (4.) zwischen endlichen Grenzen liegt.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (4.) kann man dann in der Form

$$x = c_1 \frac{\cos\int_0^t R\,dt}{\sqrt{R}} + c_2 \frac{\sin\int_0^t R\,dt}{\sqrt{R}} + T \tag{6.}$$

darstellen.*) Hierbei bedeuten c_1, c_2 willkürliche Konstanten; T und R sind im weiteren Sinne periodische Funktionen mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. Diese Funktionen besitzen Ableitungen erster und zweiter Ordnung, die ebenfalls im weiteren Sinne periodisch sind mit den genannten Perioden. R ist

*) In dieser Abhandlung kommen nur reelle Größen vor. Alle Quadratwurzeln sind „nicht negativ“ zu nehmen.

für alle t gleich oder größer als eine positive Konstante. Die angeschriebene allgemeine Lösung kann kürzer in der Form

$$x = T + C\frac{\cos\int_c^t R\,dt}{\sqrt{R}} \tag{7.}$$

dargestellt werden, wobei C und c willkürliche Konstanten bedeuten. Sind umgekehrt R und T Funktionen, welche den genannten Bedingungen genügen, so stellt (6.) das allgemeine Integral einer Differentialgleichung dar, welche den Typus der Gleichung (4.) besitzt.

Die Differentialgleichung (4.) besitzt außer der Lösung $x = T$ dann und nur dann noch eine im weiteren Sinne periodische Lösung mit irgendwelchen Perioden, wenn $\int_0^t R\,dt$ in der Form

$$\int_0^t R\,dt = \gamma\cdot t + \quad \text{i. w. S. periodische Funktion mit den Perioden } \alpha_1, \ldots \alpha_m \tag{8.}$$

darstellbar ist. (γ bedeutet hierbei eine Konstante.) Ist eine solche Darstellung möglich, so sind *alle* Lösungen von (4.) im weiteren Sinne periodisch. In *diesem* Falle nimmt die allgemeine Lösung demnach eine Form an, welche man auf Grund der Theorie der Differentialgleichungen mit periodischen (im engeren Sinn) Koeffizienten und der formalen Entwicklungen *Lindstedt*s erwarten konnte. Eine Darstellung von $\int_0^t R\,dt$ in der Form (8.) ist jedoch keineswegs immer möglich. Die bezüglich der Gleichung (4.) eingeführten Voraussetzungen berechtigen somit keineswegs zu dem Schluß, daß alle Lösungen im weiteren Sinne periodisch sind.

Ich möchte schließlich noch darauf hinweisen, daß meine Abhandlung die strenge Untersuchung einer in der Mechanik des Himmels vorkommenden Differentialgleichung bringt, daß ich jedoch nicht den Anspruch erhebe, einen direkt in der Störungsrechnung praktisch verwendbaren Beitrag zu liefern. Es handelt sich hier überhaupt nur um eine „qualitative“ Untersuchung. Den Hauptzweck derselben sehe ich in dem Nachweis, daß gewisse von mir in meiner gleich zu erwähnenden Magisterdissertation gefundene Sätze eine erfolgreiche Anwendung auf Probleme von Interesse gestatten.

I. Bericht über früher gefundene Resultate.

3. Es mögen m von Null verschiedene Größen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$, sowie die für eine Wertmenge T der Variabeln t definierte Funktion $f(t)$ vorliegen. Wie ich in meiner Magisterdissertation*) gezeigt habe, ist $f(t)$ dann und nur dann in eine für alle t des Gebietes T gleichmäßig konvergente Reihe $u_1 + u_2 + \dots + u_\nu + \dots$ ($u_1, u_2, \dots$ bedeuten ganze rationale Funktionen von $\sin \frac{2\pi}{\alpha_\mu} t$, $\cos \frac{2\pi}{\alpha_\mu} t$; $\mu = 1, 2, \dots m$) entwickelbar, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Jeder Zahl $e > 0$ kann eine zweite $\eta > 0$ so zugeordnet werden, daß $|f(t_2) - f(t_1)| < e$ wird, wenn t_1 und t_2 dem Gebiet T angehören und $\frac{t_2 - t_1}{\alpha_\mu}$ ($\mu = 1, 2, \dots m$) sich von ganzen Zahlen um weniger als η unterscheiden. Die Aussage, $f(t)$ könne in eine Reihe der eben genannten Art entwickelt werden, ist offenbar äquivalent der folgenden: Ist $p > 0$ beliebig gegeben, so kann $f(t)$ mit einem Fehler, der kleiner als p ist, für alle zugelassenen t durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden, die aus einer *endlichen* Zahl von Gliedern der Form

$$a \cdot \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\left(n_1 \frac{2\pi t}{\alpha_1}\right) \dots \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\left(n_m \frac{2\pi t}{\alpha_m}\right)$$

besteht. Hierbei ist a eine Konstante und $n_1, n_2, \dots n_m$ bedeuten ganze Zahlen.

Sind die eben besprochenen Bedingungen erfüllt, so wollen wir von der Funktion $f(t)$ sagen, sie sei im Gebiete T periodisch im weiteren Sinne mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$. Bestehen keine Relationen der Form $\frac{n_1}{\alpha_1} + \frac{n_2}{\alpha_2} + \dots + \frac{n_m}{\alpha_m} = 0$ ($n_1, n_2, \dots n_m$ sind ganze Zahlen, die nicht alle verschwinden), so sollen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ unabhängig heißen, im andern Fall von einander abhängig.**) Sind die $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ von einander abhängig, so kann man eine geringere Zahl von einander unabhängiger Perioden für die Funktion $f(t)$ angeben (s. S. 3 meiner erwähnten Arbeit).

Wir setzen nunmehr vorübergehend $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ als unabhängig voraus und nehmen ferner an, daß das Gebiet T alle reellen t umfaßt. Jedes einzelne u_μ wollen wir als Summe einer endlichen Zahl von Gliedern der Form

---

*) *P. Bohl*, Über die Darstellung von Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten. Dorpat 1893.

**) Bezüglich der Bezeichnungsweise vergleiche man die später folgenden Angaben über eine Abhandlung von Herrn *Esclangon*.

$$a \cos\left(n_1 \frac{2\pi t}{\alpha_1} - \varepsilon_1 \pi\right) \dots \cos\left(n_m \frac{2\pi t}{\alpha_m} - \varepsilon_m \pi\right)$$

darstellen. Hierbei bedeutet a eine Konstante, die $n_1, n_2, \dots n_m$ sind nicht negative ganze Zahlen; ε_μ ist gleich 0 oder gleich $\frac{1}{2}$ und die Kombination $n_\mu = 0, \varepsilon_\mu = \frac{1}{2}$ ist ausgeschlossen. Die Koeffizienten eines und desselben Kosinus-Produktes seien in $u_1, u_2, u_3 \dots$ resp. $a_1, a_2, a_3 \dots$. Dann ist, wie ich in meiner Arbeit (siehe Nr. 6 derselben) nachgewiesen habe, die Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergent, und zwar ist die Summe dieser Reihe gleich

$$2^{m-n} \operatorname*{Lim}_{t \to \infty} \left[\frac{1}{t} \int_0^t f(t) \cos\left(n_1 \frac{2\pi t}{\alpha_1} - \varepsilon_1 \pi\right) \dots \cos\left(n_m \frac{2\pi t}{\alpha_m} - \varepsilon_m \pi\right) dt\right].$$

Hierbei bedeutet n die Anzahl derjenigen $n_1, n_2, \dots n_m$, welche gleich Null sind. Für den besonderen Fall, in welchem $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = 0$ und demnach $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_m = 0$ ist, erhalten wir

$$\operatorname*{Lim}_{t \to \infty} \left[\frac{1}{t} \int_0^t f(t)\, dt\right].$$

Diese Größe soll „der konstante Teil von $f(t)$“ heißen.

Wir schließen an das Gesagte folgende Bemerkung. Es kann vorkommen, daß man bei einer (etwa für alle reellen t definierten) Funktion $f(t)$ das Erfülltsein der oben erwähnten Bedingung nicht konstatieren kann, wohl aber die folgende Eigenschaft: Es gilt $|f(t_2) - f(t_1)| < e$, sobald $\frac{t_2 - t_1}{\alpha_\mu}$ $(\mu = 1, 2, \dots m)$ sich von ganzen Zahlen um weniger als η unterscheiden, wobei e und η *bestimmte* positive Zahlen sind. Man kann dann mit einer gewissen Annäherung $f(t)$ durch eine trigonometrische Reihe mit endlicher Gliederzahl darstellen. Die Annäherung wird — oberflächlich ausgedrückt — sehr bedeutend, wenn e sehr klein ist. Ich behalte mir vor, hierauf später zurückzukommen und die Möglichkeit von Anwendungen darzutun. Überhaupt könnte das Vorhergehende zu mannigfachen Modifikationen und Neugestaltungen der Voraussetzungen anregen. Das größte Gewicht müßte hierbei auf den Nachweis der Anwendbarkeit der neueingeführten Funktionsklassen gelegt werden.

Seit dem Erscheinen meiner Magisterdissertation ist auch von anderer Seite die Aufmerksamkeit auf die im vorigen berührten und verwandte Gegenstände gelenkt worden. Ohne anfangs meine eben besprochene Arbeit

zu kennen, hat Herr *Esclangon* zunächst dieselbe Klasse von Funktionen untersucht und dann diesem Gegenstand in verallgemeinerter Form kürzlich eine umfangreiche Arbeit gewidmet.*) Ein bedeutender Teil der Abhandlung von Herrn *Esclangon* beschäftigt sich mit der Frage nach den Periodensystemen, welche bezüglich der gegebenen Funktion dieselbe Rolle spielen können, wie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. Diese Frage ist in meiner Arbeit nicht untersucht worden. Auch sonst enthält die inhaltreiche Abhandlung von Herrn *Esclangon* viel Interessantes, worauf wir hier nicht eingehen können. Die im vorhergehenden vorkommenden Bezeichnungen „Perioden", „unabhängige, abhängige Perioden" habe ich der Arbeit von Herrn *Esclangon* entlehnt. Der oben eingeführten Bezeichnung „periodische Funktion im weiteren Sinne" entspricht bei Herrn *Esclangon* die Bezeichnung „gleichmäßig stetige quasiperiodische Funktion".

4. Ich will nun noch einige Sätze mitteilen, welche meiner Doktordissertation**) entnommen sind.

Es mögen die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + \xi_i \qquad (i=1, 2, \ldots n) \tag{9.}$$

vorliegen. Hierbei bedeuten die ξ_i Funktionen von t und $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche für alle t und die x des Gebietes $|x_i| < \gamma$ $(i=1, 2, \ldots n)$ definiert sind. Für die genannten t, x-Werte mögen $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}$ existieren und, gleichwie die Funktionen ξ_i, stetige Funktionen von t, x sein. Die a sind Konstanten, welche der Bedingung genügen, daß die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\omega & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\omega & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0$$

keine Wurzeln mit verschwindendem reellen Teil hat. Endlich mögen für die zugelassenen t, x-Werte die Ungleichungen

---

*) *E. Esclangon*, Sur une extension de la notion de périodicité C. R. t. CXXXV. Sur les fonctions quasi-périodiques C. R. t. CXXXVII. Les fonctions quasi-périodiques, Annales de l'observatoire de Bordeaux 1904.

**) *P. Bohl*, Über gewisse Differentialgleichungen allgemeinen Charakters, welche in der Mechanik Anwendung finden. Dorpat (Jurjew) 1900 (russisch).

$$\left|\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\right| < \Delta$$

und für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ und alle t die Ungleichungen

$$\left|\frac{\xi_i}{\gamma}\right| < E$$

gelten, wobei Δ und E gewisse positive Konstanten sind, deren Wert angebbar ist, sobald das Tableau der a-Koeffizienten vorliegt.

Unter den genannten Voraussetzungen besteht folgender Satz: *Es gibt eine und nur eine Lösung λ der Differentialgleichungen* (9.), *für welche bei allen t $|x_i| < \frac{\gamma}{2}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ gilt. Jede Lösung, für welche die letzteren Bedingungen bei genügend großen t-Werten erfüllt sind, strebt für $t \to \infty$ asymptotisch zur Lösung λ, d. h. die Unterschiede entsprechender x streben für $t \to \infty$ nach 0. Entsprechendes gilt für $t \to -\infty$.**)

Wir wollen nun die weitere Voraussetzung einführen, daß t in den ξ_i „in trigonometrischer Form“ vorkommt. Wir verstehen darunter folgendes: Die ξ_i gehen für die zugelassenen $t, x_1, x_2, \ldots x_m$ aus Funktionen $\varrho_i(x_1, \ldots x_n;\ u_1, \ldots u_m)$ durch die Substitution $u_1 = \frac{t}{\alpha_1}, \ldots u_m = \frac{t}{\alpha_m}$ hervor. Hierbei sind die ϱ für die zugelassenen x und alle u stetige und in den u mit den Perioden 1 periodische Funktionen. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ sind von Null verschiedene Konstanten, von denen in meiner Arbeit angenommen ist, daß zwischen ihnen keine Relationen $\frac{n_1}{\alpha_1} + \frac{n_2}{\alpha_2} + \cdots + \frac{n_m}{\alpha_m} = 0$ (die n sind ganze Zahlen, die nicht alle verschwinden) bestehen.

Unter den in der genannten Weise vervollständigten Voraussetzungen sind die Elemente $x_1, x_2, \ldots x_n$ der Lösung λ im weiteren Sinne periodische Funktionen mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. Ist außerdem bekannt, daß die Funktionen ϱ stetige Ableitungen nach den x und u bis zu einer genügend hohen Ordnung besitzen, so kann man jedes Element x_i der Lösung λ in der Form der unendlichen Reihe

$$x_i = \Sigma A \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\nu_1 \frac{2\pi t}{\alpha_1}\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\nu_2 \frac{2\pi t}{\alpha_2}\right) \cdots \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\nu_m \frac{2\pi t}{\alpha_m}\right)$$

darstellen. Hierbei sind die ν ganze nicht negative Zahlen und die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für alle t.

---

*) Die Mannigfaltigkeit dieser zu λ asymptotischen Lösungen wird in meiner Arbeit ebenfalls untersucht.

Von den angeführten Sätzen habe ich in der besprochenen Arbeit einige Anwendungen gemacht. Sie betreffen einige Probleme der Mechanik, bei welchen Zerstreuung der Energie vorkommt, ferner die Bewegung eines mechanischen Systems um eine Gleichgewichtslage, endlich die Theorie des Saturnringes. Außerdem findet sich im letzten Paragraphen eine Anwendung auf die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Dieselbe wird daselbst in der Form

$$\frac{d^2z}{dt^2}-[\alpha+\varphi(t)]z=\psi(t)$$

vorausgesetzt. Hierbei gehen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ aus Funktionen $\Phi(u_1,\dots u_m)$, $\Psi(u_1,\dots u_m)$ mit Hilfe der Substitution $u_1=\frac{t}{\alpha_1},\dots u_m=\frac{t}{\alpha_m}$ hervor. Φ und Ψ sind für alle u gegeben, immer stetig und bezüglich aller u mit den Perioden 1 periodisch. Hinsichtlich $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_m$ machen wir dieselbe Voraussetzung wie im vorhergehenden Satz. α bedeutet eine positive Konstante. $|\varphi(t)|$ ist für alle t kleiner als eine gewisse Zahl, die angegeben werden kann, wenn α gegeben ist.

Die allgemeine Lösung der genannten Differentialgleichnng ist

$$\mathfrak{T}+c_1\frac{e^{\int_0^t T\,dt}}{\sqrt{T}}+c_2\frac{e^{-\int_0^t T\,dt}}{\sqrt{T}}.$$

Hierbei sind c_1 und c_2 die Integrationskonstanten, $\mathfrak{T}$ und T im weiteren Sinne periodische Funktionen mit den Perioden $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_m$. Besitzen Φ und Ψ stetige Ableitungen nach den u bis zu einer genügend hohen Ordnung, so kann man $\mathfrak{T}$ und T in Reihen entwickeln, die den gewöhnlichen Fourierschen Reihen mit mehreren Veränderlichen entsprechen.

Die Bedingung $\alpha>0$ nimmt diesem Resultat viel von seiner Bedeutung. Infolge dieser Voraussetzung umfaßt die besprochene Gleichung beispielsweise *nicht* die Gleichung (3.). Ich bemerke schließlich, daß im folgenden von den Resultaten meiner Doktordissertation kein Gebrauch gemacht wird.

II. Hilfssätze und Bezeichnungen.

5. Kann ein Punktsystem auf einer Geraden dadurch erhalten werden, daß man zu einem Punkte Q des Systems alle Punkte hinzufügt, die von Q

um ein ganzes Vielfaches der von Null verschiedenen Länge a abstehen, so wollen wir sagen, das Punktsystem bilde eine Punktfolge (a). Es mögen m Punktfolgen $(a_1), (a_2), \dots (a_m)$ vorliegen. P_1 sei ein Punkt von (a_1), P_2 ein Punkt von (a_2) usw., endlich P_m ein Punkt von (a_m). Wir sagen dann: $P_1, P_2, \dots P_m$ bilden einen Punkthaufen. Stehen je zwei Punkte eines Punkthaufens von einander um weniger als die von Null verschiedene Länge ε ab, so sagen wir, es liege ein Punkthaufen $\{\varepsilon\}$ vor. Genügen die durch irgend eine Einheit zahlenmäßig ausgedrückten Längen $a_1, a_2, \dots a_m$ keiner Gleichung $\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} + \dots + \frac{n_m}{a_m} = 0$ ($n_1, n_2, \dots n_m$ bedeuten ganze Zahlen, welche nicht sämtlich verschwinden), so wollen wir die Längen als von einander unabhängig bezeichnen. *Sind die Längen $a_1, a_2, \dots a_m$ von einander unabhängig, so existiert für m Punktfolgen $(a_1), (a_2), \dots (a_m)$ immer ein Punkthaufen $\{\varepsilon\}$, wie die Länge ε auch gewählt sein möge.* Die Berechtigung dieser Aussage ergibt sich unmittelbar aus folgendem Satz: Es seien m Zahlen $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ beliebig gegeben, ferner m von Null verschiedene Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$, welche keiner Beziehung $\frac{n_1}{\alpha_1} + \frac{n_2}{\alpha_2} + \dots + \frac{n_m}{\alpha_m} = 0$ ($n_1, n_2, \dots n_m$ bedeuten ganze Zahlen, welche nicht sämtlich verschwinden) genügen. Man kann dann die Gleichung

$$\beta_1 + \nu_1 \alpha_1 + \varepsilon_1 = \beta_2 + \nu_2 \alpha_2 + \varepsilon_2 = \dots = \beta_m + \nu_m \alpha_m + \varepsilon_m$$

erfüllen, indem man anstatt $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m$ ganze Zahlen setzt, an Stelle der $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_m$ aber Größen, deren absoluter Betrag kleiner als eine beliebig gegebene positive Größe ist. Dieser letzte Satz folgt leicht aus den von *Kronecker* in der Abhandlung „Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen“ entwickelten Resultaten.*) Ich gehe nun zum Beweise eines Hilfsatzes über: ob derselbe neu ist, muß ich dahingestellt sein lassen.

*Es mögen m von Null verschiedene und von einander unabhängige Längen $a_1, a_2, \dots a_m$ gegeben sein und außerdem eine von Null verschiedene Länge ε. Es existiert dann eine solche Länge T, daß folgende Aussage gilt: Wie man auch eine Strecke**) von der Länge T und m Punktfolgen $(a_1), (a_2), \dots (a_m)$ auf einer Geraden annehmen möge, stets liegt auf der genannten Strecke ein Punkthaufen $\{\varepsilon\}$.*

*) Bd. III, 1, S. 47 der Ausgabe von *Kronecker*s Werken. Ohne die genannte Abhandlung zu kennen, habe ich den Satz in meiner oben erwähnten Magisterdissertation (s. S. 8 derselben) bewiesen.

**) Die beiden Grenzpunkte der Strecke sollen nicht zu der Strecke gerechnet werden.

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir versuchsweise an, unsere Behauptung sei nicht richtig. Wie man demnach auch die von Null verschiedene Länge L wählen möge, stets existieren auf der Geraden m Punktfolgen $(a_1), (a_2), \ldots (a_m)$ und eine Strecke von der Länge L in einer solchen Lage, daß die Strecke keinen Punkthaufen $\{\varepsilon\}$ enthält. Wir wählen nun für L der Reihe nach $L_1, L_2, L_3, \ldots$, wobei die letzteren Größen nach ∞ konvergieren. Für jeden der genannten L-Werte bringen wir eine Strecke von der Länge L und m Punktfolgen $(a_1), (a_2), \ldots (a_m)$ in die oben charakterisierte Lage. Die so erhaltenen Kombinationen von Strecken und Punktfolgen wollen wir der Reihe nach mit $[1], [2], [3]$ usw. bezeichnen. Die Symbole sollen jedoch nur die relative Lage der Strecken und Punktfolgen zu einander fixieren; $[\mu]$ bezeichnet also auch die μ-te Kombination nach einer die genannte relative Lage nicht verändernden längs der Geraden erfolgenden Verschiebung.

Wir denken uns nun Verschiebungen der eben genannten Art so ausgeführt, daß die Mitten aller vorkommenden Strecken in einem Punkt M zusammenfallen. Wir grenzen weiter auf der Geraden eine Strecke J ab, deren Länge die Längen $a_1, a_2, \ldots a_m$ übertrifft. Wie man dann auch m Punktfolgen $(a_1), (a_2), \ldots (a_m)$ annehmen möge, stets kann man einen auf J gelegenen Punkthaufen angeben. Dies gilt insbesondere auch für die in den Systemen $[1], [2], [3] \ldots$ auftretenden Punktfolgen; Π_1, Π_2, Π_3 usw. mögen auf J gelegene Punkthaufen sein, die den Systemen $[1], [2], [3], \ldots$ entsprechen. Es ist nunmehr klar, daß man auf der Geraden Punkte $H_1, H_2, \ldots H_m$ angeben kann, welche folgende Eigenschaft besitzen: Wählt man für die Punkte $H_1, H_2, \ldots H_m$ beliebig kleine Umgebungen, so gibt es unendlich viele Punkthaufen Π, deren Punkte derart in die Umgebungen von $H_1, H_2, \ldots H_m$ fallen, daß der einer Punktfolge (a_1) angehörende Punkt in der Umgebung von H_1 liegt, der einer Punktfolge (a_2) angehörende Punkt in der Umgebung von H_2 usw. Jetzt bilden wir diejenige Punktfolge (a_1), welcher der Punkt H_1 angehört, ferner diejenige Punktfolge (a_2), welcher der Punkt H_2 angehört usw., endlich diejenige Punktfolge (a_m), welcher der Punkt H_m angehört. Auf Grund der unserem Hilfssatz vorangehenden Bemerkungen erkennen wir, daß diese m Punktfolgen einen Punkthaufen $\{\varepsilon\}$ besitzen. $P_1, P_2, \ldots P_m$ seien die Punkte eines solchen Haufens. Aus dem bisher Gesagten folgt: Wählt man für $P_1, P_2, \ldots P_m$ beliebig kleine Umgebungen, so gibt es unendlich viele Punkthaufen $\mathfrak{P}_\alpha, \mathfrak{P}_\beta, \mathfrak{P}_\gamma, \ldots$, welche aus verschiedenen Systemen $[\alpha], [\beta], [\gamma], \ldots$

stammen und deren Punkte (der Punktfolge entsprechend) in die Umgebungen von $P_1, P_2, \ldots P_m$ fallen. Sind diese Umgebungen genügend klein gewählt, so sind $\mathfrak{P}_\alpha, \mathfrak{P}_\beta, \mathfrak{P}_\gamma, \ldots$ Punkthaufen $\{\varepsilon\}$; dementsprechend mögen die genannten Umgebungen fest angenommen werden. Da es sich hierbei um unendlich viele verschiedene Systeme $[\alpha], [\beta], [\gamma], \ldots$ handelt, so kommen in $[\alpha], [\beta], [\gamma], \ldots$ Strecken vor, deren Länge größer ist als eine beliebige fest gewählte Länge. Es tritt also notwendigerweise bei einem der Systeme $[\alpha], [\beta], [\gamma], \ldots$ der Fall ein, daß die dem System angehörende Strecke die Punkte $P_1, P_2, \ldots P_m$ und ihre Umgebungen umfaßt. Geschieht dies für ein gewisses System $[\mu]$, so gilt nach dem Gesagten folgendes: Die dem System $[\mu]$ angehörenden Punktfolgen haben einen Punkthaufen $\{\varepsilon\}$, welcher auf der dem System $[\mu]$ angehörenden Strecke liegt. Unter den Systemen $[1], [2], [3], \ldots$ gibt es aber nach dem obigen keines, dem eine solche Eigenschaft zukäme. Wir sind somit zu einem Widerspruch gekommen. Die Annahme, unsere Behauptung sei nicht richtig, ist demnach zu verwerfen und unser Hilfssatz ist bewiesen.

Der eben bewiesene Hilfssatz läßt unmittelbar die Berechtigung folgender Aussage erkennen: *Es seien $a_1, a_2, \ldots a_m$ m von einander unabhängige Längen, ε irgend eine positive Zahl. Man kann dann eine Länge T so bestimmen, daß folgende Aussage gilt: Wie man auch eine Strecke von der Länge T und einen Punkt Q auf einer Geraden annehmen möge, es gibt auf der Strecke einen Punkt R, für welchen die Verhältnisse $\frac{RQ}{a_1}, \frac{RQ}{a_2}, \ldots \frac{RQ}{a_m}$ sich von ganzen Zahlen um weniger als ε unterscheiden.*

Es möge nun eine im weiteren Sinne periodische Funktion $f(t)$ für alle t definiert sein. Man könnte den zuletzt genannten Satz benutzen, um die Berechnung von $f(t)$ mit vorgeschriebenem Genauigkeitsgrad auf die Berechnung von $f(t)$ für ein endliches Intervall zurückzuführen. Diese Bemerkung könnte insbesondere in dem Fall von Nutzen sein, wo $f(t)$ als Lösung einer Differentialgleichung auftritt, da für die Berechnung von Lösungen in endlichen Intervallen der unabhängigen Variabeln häufig allgemeine Methoden bekannt sind. Wir gehen hierauf nicht weiter ein.

Es möge wieder eine im weiteren Sinne periodische Funktion $f(t)$ für alle t definiert sein. G sei die obere, K die untere Grenze der Funktionswerte; $S = G - K$ ist dann die Schwankung von $f(t)$. *Zu jeder positiven Zahl p gibt es eine solche positive Zahl q, daß die Schwankung von $f(t)$*

in jedem Intervall $a \leqq t \leqq a+q$ *sich von* S *um weniger als* p *unterscheidet.* Hierbei bedeutet a eine beliebige Größe. Um die Richtigkeit dieser Bemerkung einzusehen, wählen wir t_1 und t_2 in der Weise, daß

$$f(t_1) > G - \frac{p}{4} \qquad f(t_2) < K + \frac{p}{4}.$$

Aus dem vorhergehenden Satz folgt: Es gibt eine solche Zahl $q > 0$, daß in jedem Intervall $a < t < a+q$ sowohl Funktionswerte vorkommen, die sich von $f(t_1)$ um weniger als $\frac{p}{4}$ unterscheiden, als auch Funktionswerte, die sich von $f(t_2)$ um weniger als $\frac{p}{4}$ unterscheiden. Der Unterschied zweier derartiger Funktionswerte ist dann $> G - \frac{p}{2} - \left[K + \frac{p}{2}\right] = S - p$. Somit haben wir für die Schwankung σ im Intervall $a \leqq t \leqq a+q$ $S - p < \sigma \leqq S$. Es ist also $|S - \sigma| < p$. Damit ist die Richtigkeit unserer Bemerkung bewiesen.

Wir formulieren endlich noch einen unmittelbar aus dem vorhergehenden folgenden Satz. Es sei $f(t)$ eine für alle t definierte im weiteren Sinne periodische Funktion. Wir wählen in bekannter Weise t und $f(t)$ als Abszisse und Ordinate von Punkten. *Sind zwei von Null verschiedene Längen* ε *und* s *beliebig angenommen, so gibt es eine entsprechende Länge* $S > s$ *von der Beschaffenheit, daß folgendes gilt: Wie auch zwei Strecken* (s) *und* (S) *von den Längen* s *und* S *auf der Abszissenachse gewählt sein mögen, man kann auf* (S) *eine dritte Strecke* $\{s\}$ *von der Länge* s *so angeben, daß der Verlauf von* $f(t)$ *zwischen den Endpunkten von* $\{s\}$ *dem Verlauf von* $f(t)$ *zwischen den Endpunkten von* (s) *gleicht bis auf Abweichungen in den Ordinaten, die kleiner sind als* ε.

Der besseren Übersicht wegen haben wir im vorhergehenden geometrische Vorstellungen benutzt. Es ist aber sofort klar, daß alles vorhergehende unmittelbar in eine rein analytische Form übersetzt werden kann.

6. Es möge eine für alle t definierte im weiteren Sinne periodische Funktion $f(t)$ vorliegen; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ sei ein Periodensystem von $f(t)$. Wir denken uns $f(t)$ gemäß Nr. 3 in eine Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ entwickelt und ersetzen in derselben $\frac{t}{\alpha_\mu}$ durch x_μ $(\mu = 1, 2, \ldots m)$. Es ergibt sich dann eine Reihe $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots$, welche für alle diejenigen $x_1, x_2, \ldots x_m$ gleichmäßig konvergiert, welche durch $x_1 \equiv \frac{t}{\alpha_1}$, $x_2 \equiv \frac{t}{\alpha_2}, \ldots x_m \equiv \frac{t}{\alpha_m}$ erhalten werden. (Das Zeichen $\equiv$ bedeutet hierbei Gleichheit bis auf ganze Zahlen.) Das damit

eingeführte Gebiet von $x_1, x_2, \dots x_m$-Stellen bezeichnen wir mit X. Es ist klar, daß die Reihe $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots$ auch gleichmäßig konvergiert für alle Häufungsstellen des Gebietes X. In der Tat; es werde $p > 0$ beliebig angenommen. Es gibt dann einen solchen Index μ_p, daß $|U_{\nu+1} + U_{\nu+2} + \cdots + U_{\nu+n}| \overline{\leqq} p$ wird, sobald $\nu \overline{\geqq} \mu_p$ und die x dem Gebiete X angehören. Für eine Häufungsstelle von X muß offenbar ebenfalls $|U_{\nu+1} + U_{\nu+2} + \cdots + U_{\nu+n}| \overline{\leqq} p$ gelten, sobald $\nu \overline{\geqq} \mu_p$. Somit konvergiert die Reihe $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots$ gleichmäßig für das Gebiet Ξ, welches aus dem Gebiet X und seinen Häufungsstellen besteht. $\Psi(x_1, x_2, \dots x_m) = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots$ ist für das Gebiet Ξ eine gleichmäßig stetige Funktion. Gehört die Stelle $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m$ dem Gebiet Ξ an, so offenbar auch die Stelle $x_1 \equiv \xi_1$, $x_2 \equiv \xi_2, \dots x_m \equiv \xi_m$. Sind $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m$ und $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ Stellen von Ξ, so gilt dasselbe von $x_1 \equiv \mu\xi_1 + \nu\eta_1$, $x_2 \equiv \mu\xi_2 + \nu\eta_2, \dots x_m \equiv \mu\xi_m + \nu\eta_m$, wobei μ, ν irgendwelche positive oder negative ganze Zahlen oder Null bedeuten. Ψ ist bezüglich aller Variabeln mit den Perioden 1 periodisch. Die Funktion Ψ ist übrigens nichts anderes als die in § 7 meiner Magisterdissertation angeführte gleichbezeichnete Funktion, wenn man dieselbe auch für die Häufungsstellen der „Stellen erster Kategorie“ definiert. Es gilt

$$f(t) = \Psi\left(\frac{t}{\alpha_1}, \frac{t}{\alpha_2}, \dots \frac{t}{\alpha_m}\right).$$

Liegt die Funktion $f(t)$ vor und ist das Periodensystem $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ fest gewählt, so ist, wie leicht zu sehen, die Funktion Ψ völlig bestimmt.

Wir bezeichnen nun mit $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m$ die Elemente einer Stelle des Gebietes Ξ und bilden

$$\varphi(t) = \Psi\left(\frac{t}{\alpha_1} + \sigma_1, \frac{t}{\alpha_2} + \sigma_2, \dots \frac{t}{\alpha_m} + \sigma_m\right).$$

Offenbar ist $\varphi(t)$ ebenfalls eine im weiteren Sinne periodische Funktion mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$. Wir sagen, $\varphi(t)$ *sei mit* $f(t)$ *verwandt und habe bezüglich* $f(t)$ *die Phasen* $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m$.*) Die Funktion

$$\Psi(x_1 + \sigma_1, x_2 + \sigma_2, \dots x_m + \sigma_m)$$

entspricht $\varphi(t)$ ebenso, wie $\Psi(x_1, x_2, \dots x_m)$ der Funktion $f(t)$. Wir schreiben

$$\varphi(t) = f(t, \sigma_1, \dots \sigma_m).$$

*) Die Perioden werden hierbei als fest gewählt betrachtet.

Offenbar gilt, wenn $\sigma_1 \equiv \tau_1,\ \sigma_2 \equiv \tau_2, \dots \sigma_m \equiv \tau_m$,

$$f(t, \sigma_1, \dots \sigma_m) = f(t, \tau_1, \tau_2, \dots \tau_m).$$

Ferner haben wir, wenn $s_1, s_2, \dots s_m$ ebenfalls eine Stelle von Ξ darstellen,

$$\varphi(t, s_1, s_2, \dots s_m) = f(t, \sigma_1 + s_1, \sigma_2 + s_2, \dots \sigma_m + s_m).$$

Auf Grund dieser Gleichung erkennt man leicht, daß das Ensemble der mit $\varphi(t)$ verwandten Funktionen zusammenfällt mit dem Ensemble der mit $f(t)$ verwandten Funktionen. Dabei werden $\varphi(t) = \varphi(t, 0, 0, \dots 0)$ und $f(t) = f(t, 0, 0, \dots 0)$ mit zu dem betreffenden Ensemble gezählt.

Es möge nun ein System von Funktionen $f_1(t), f_2(t), \dots f_n(t)$ vorliegen. Die Elemente dieses Systems seien im weiteren Sinne periodische Funktionen mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$. $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m$ mögen eine Stelle des Gebietes Ξ darstellen. Wir sagen dann: Die Funktionen $f_1(t, \sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m)$, $f_2(t, \sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m), \dots f_n(t, \sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m)$ bilden ein mit dem vorigen verwandtes und bezüglich desselben durch die Phasen $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m$ charakterisiertes System.

Wir wollen schließlich zeigen, daß zwei verwandte Funktionen $f(t) = \Psi\left(\frac{t}{\alpha_1}, \dots \frac{t}{\alpha_m}\right)$ und $\varphi(t) = \Psi\left(\frac{t}{\alpha_1} + \sigma_1, \dots \frac{t}{\alpha_m} + \sigma_m\right)$ *denselben konstanten Teil* besitzen. Wir haben

$$\int_0^t \varphi(t)\,dt = \int_0^t \Psi\left(\frac{t}{\alpha_1} + \sigma_1, \dots \frac{t}{\alpha_m} + \sigma_m\right) dt$$

$$= \int_\tau^{t+\tau} \Psi\left(\frac{t}{\alpha_1} - \frac{\tau}{\alpha_1} + \sigma_1, \dots \frac{t}{\alpha_m} - \frac{\tau}{\alpha_m} + \sigma_m\right) dt$$

$$= \int_\tau^0 W\,dt + \int_t^{t+\tau} W\,dt + \int_0^t W\,dt; \qquad W = \Psi\left(\frac{t}{\alpha_1} - \frac{\tau}{\alpha_1} + \sigma_1, \dots \frac{t}{\alpha_m} - \frac{\tau}{\alpha_m} + \sigma_m\right),$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(t)\,dt - \frac{1}{t}\int_0^t f(t)\,dt = \frac{\int_\tau^0 W\,dt + \int_t^{t+\tau} W\,dt}{t}$$

$$+ \frac{1}{t}\int_0^t \left[W - \Psi\left(\frac{t}{\alpha_1}, \dots \frac{t}{\alpha_m}\right)\right] dt.$$

Wir wählen nun $\varepsilon > 0$ beliebig und bemerken, daß $|\Psi(x_1, x_2, \dots x_m)| \leqq K$ gilt, wobei $K =$ konstans. Wir wählen dann τ so, daß $\left|W - \Psi\left(\frac{t}{\alpha_1}, \dots \frac{t}{\alpha_m}\right)\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$, was möglich ist. Dann gilt, wenn $t > 0$

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(t)\,dt - \frac{1}{t}\int_0^t f(t)\,dt\right| \leqq \frac{2K|\tau|}{t} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sobald demnach $t \geqq \frac{4K|\tau|}{\varepsilon}$ wird, ist die linke Seite $\leqq \varepsilon$. Somit gilt

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(t)\,dt - \frac{1}{t}\int_0^t f(t)\,dt\right) = 0.$$

Dies beweist die Richtigkeit unserer Bemerkung.

III. Das Integral einer im weiteren Sinne periodischen Funktion.

7. *Theorem.* *$f(t)$ sei für alle t eine im weiteren Sinne periodische Funktion mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. Es sei bekannt, daß $\int_0^t f(t)\,dt = \varphi(t)$ für alle t zwischen endlichen Grenzen liege. Dann ist auch $\varphi(t)$ eine im weiteren Sinne periodische Funktion mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$.**)

*Beweis.***) $\varphi(t)$ besitzt eine obere Grenze g und eine untere Grenze k. Es genügt, $g > k$ vorauszusetzen. Wir wählen γ gemäß der Bedingung $0 < \gamma < g - k$, sonst beliebig. Es gibt solche Werte t_1 und t_2 $(t_1 \geqq t_2)$, daß $\varphi(t_1) > g - \frac{\gamma}{6}$, $\varphi(t_2) < k + \frac{\gamma}{6}$. Nach den Hilfsbetrachtungen des vorigen Kapitels existiert eine solche Größe $T > 0$, daß folgendes gilt: Wie auch r gewählt sein möge, man kann zwischen r und $r+T$ solche Zahlen ϑ und $\vartheta + |t_2 - t_1|$ finden, daß der Verlauf von $f(t)$ zwischen ϑ und $\vartheta + |t_2 - t_1|$ inklusive dem Verlauf von $f(t)$ zwischen dem kleineren und größeren Wert der t_1 und t_2 gleicht mit einer Abweichung, die absolut $< \frac{\gamma}{6|t_2 - t_1|}$ ist.

---

*) Herr *Esclangon* führt in seiner oben erwähnten Abhandlung auf S. 149 diesen Satz ohne Beweis an, indem er sich auf eine briefliche Mitteilung meinerseits bezieht. Wie ich aus einem Schreiben von Herrn *Esclangon* ersehe, war ihm jedoch der in Rede stehende Satz bereits vor meiner Mitteilung bekannt. Möglicherweise habe ich übrigens in der letzteren die (wie aus der Arbeit von Herrn *Esclangon* hervorgeht) überflüssige Annahme gemacht, daß die Perioden von einander unabhängig seien. Der Beweis, den ich dabei im Auge hatte und der in dieser Nummer dargestellt wird, ist jedoch von dieser Voraussetzung unabhängig.

**) Man könnte die Untersuchungen der folgenden Kapitel so anordnen, daß der besprochene Satz als unmittelbare Folge derselben erscheint.

Dann gilt auch

$$\left|\int_{\vartheta}^{\vartheta+|t_2-t_1|} f(t)\,dt - \int_{\varrho}^{\varrho+|t_2-t_1|} f(t)\,dt\right| < \frac{\gamma}{6},$$

wenn ϱ die kleinere der Zahlen t_1 und t_2 bedeutet. Wir haben also

$$\varphi(\vartheta+|t_2-t_1|)-\varphi(\vartheta)=\varphi(\varrho+|t_2-t_1|)-\varphi(\varrho)+\omega,\quad |\omega|<\frac{\gamma}{6},$$

$$|\varphi(\vartheta+|t_2-t_1|)-\varphi(\vartheta)| \geqq |\varphi(\varrho+|t_2-t_1|)-\varphi(\varrho)|-|\omega|$$

$$> g-k-\frac{\gamma}{3}-\frac{\gamma}{6}=g-k-\frac{\gamma}{2}.$$

Bedenkt man, daß $k \leqq \varphi(t) \leqq g$, so sieht man, daß die größere der $\varphi(\vartheta+|t_2-t_1|)$ und $\varphi(\vartheta)$ größer als $g-\frac{\gamma}{2}$, die kleinere kleiner als $k+\frac{\gamma}{2}$ ist. *Wie man also auch r wählt, zwischen r und $r+T$ liegen t-Werte, für welche $\varphi(t)>g-\frac{\gamma}{2}$ und solche, für welche $\varphi(t)<k+\frac{\gamma}{2}$ gilt.*

Es gibt eine solche Größe $\varepsilon>0$, daß $|f(t+\tau)-f(t)|<\frac{\gamma}{2T}$, wenn $\frac{\tau}{\alpha_1}, \frac{\tau}{\alpha_2}, \ldots \frac{\tau}{\alpha_m}$ sich von ganzen Zahlen um weniger als ε unterscheiden. Wir wollen uns irgend ein τ denken, welches letztere Bedingung erfüllt. Wir bilden

$$\varphi(t_0+\tau)-\varphi(t_0)=\int_{t_0}^{t_0+\tau} f(t)\,dt,$$

wobei wir t_0 beliebig gewählt haben. Zwischen t_0 und t_0+T gibt es solche Werte c, d, daß

$$\varphi(c)>g-\frac{\gamma}{2},\qquad \varphi(d)<k+\frac{\gamma}{2}.$$

Wir haben

$$\varphi(t_0+\tau)-\varphi(t_0)-[\varphi(c+\tau)-\varphi(c)]=\int_{c+\tau}^{t_0+\tau} f(t)\,dt-\int_{c}^{t_0} f(t)\,dt$$

$$=\int_{c}^{t_0}[f(t+\tau)-f(t)]\,dt,$$

$$\varphi(c+\tau)\leqq g,\qquad \varphi(c)>g-\frac{\gamma}{2},\qquad \varphi(c+\tau)-\varphi(c)<\frac{\gamma}{2},$$

$$\int_{c}^{t_0}[f(t+\tau)-f(t)]\,dt \leqq \frac{\gamma}{2T}|t_0-c|<\frac{\gamma}{2},$$

$$\varphi(t_0+\tau)-\varphi(t_0)<\gamma.$$

Ähnlich haben wir

$$\varphi(t_0+\tau)-\varphi(t_0)-[\varphi(d+\tau)-\varphi(d)]=\int_d^{t_0}[f(t+\tau)-f(t)]\,dt,$$

$$\varphi(d+\tau)\gtrless k, \quad \varphi(d)<k+\frac{\gamma}{2}, \quad \varphi(d+\tau)-\varphi(d)>-\frac{\gamma}{2},$$

$$\left|\int_d^{t_0}[f(t+\tau)-f(t)]\,dt\right| \gtrless \frac{\gamma}{2T}|t_0-d|<\frac{\gamma}{2},$$

$$\int_d^{t_0}[f(t+\tau)-f(t)]\,dt>-\frac{\gamma}{2}, \quad \varphi(t_0+\tau)-\varphi(t_0)>-\gamma.$$

Somit

$$|\varphi(t_0+\tau)-\varphi(t_0)|<\gamma.$$

Zu jeder Zahl $\eta>0$ gibt es daher ein solches $\varepsilon>0$, daß $|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)|<\eta$, wenn $\frac{\tau}{\alpha_1}, \frac{\tau}{\alpha_2}, \ldots \frac{\tau}{\alpha_m}$ sich von ganzen Zahlen um weniger als ε unterscheiden. Also ist $\int_0^t f(t)\,dt$ im weiteren Sinne periodisch mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, q. e. d.

Liegt $\int_0^t f(t)\,dt$ zwischen endlichen Grenzen, so ist der konstante Teil von $f(t)$ offenbar gleich 0. Wird von einer für alle t definierten im weiteren Sinne periodischen Funktion ihr konstanter Teil subtrahiert, so sagen wir, die Funktion werde durch die genannte Operation von ihrem konstanten Teil befreit. Offenbar sind wir dann zu folgender Aussage berechtigt: *Es sei $f(t)$ eine im weiteren Sinne periodische Funktion mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$; $\chi(t)$ sei die von ihrem konstanten Teil befreite Funktion: $\int_0^t f(t)\,dt$ ist dann und nur dann in der Form*

$\int_0^t f(t)\,dt = ct +$ zwischen endlichen Grenzen bleibende Funktion (c=konst.)

darstellbar, wenn $\int_0^t \chi(t)\,dt$ zwischen endlichen Grenzen bleibt. c ist in diesem Fall der konstante Teil von $f(t)$ und die rechts an zweiter Stelle stehende Funktion ist im weiteren Sinne periodisch mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$.

Es möge eine für alle t definierte im weiteren Sinne periodische Funktion $f(t)$ vorliegen; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ seien ein Periodensystem von $f(t)$. $\varphi(t)$ sei ein Integral von $f(t)$ und bleibe zwischen endlichen Grenzen. Dann ist

nach dem vorigen $\varphi(t)$ eine im weiteren Sinne periodische Funktion mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$. *Bedeutet* $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m$ *irgend ein System von Phasen, so ist* $\varphi(t, \sigma_1, \dots \sigma_m)$ *ein Integral von* $f(t, \sigma_1, \dots \sigma_m)$.

Um diese Behauptung zu begründen, ordnen wir $f(t)$ und $\varphi(t)$ Funktionen $F(x_1, x_2, \dots x_m)$, $\Phi(x_1, x_2, \dots x_m)$ in der Weise zu, wie es in Nr. 6 auseinandergesetzt wurde. Wir haben bei beliebig gewähltem τ

$$\int_0^t f(t, \sigma)\, dt = \int_0^t F\Big(\frac{t}{\alpha_1} + \sigma_1, \dots \frac{t}{\alpha_m} + \sigma_m\Big) dt$$

$$= \int_\tau^{t+\tau} F\Big(\frac{t}{\alpha_1} - \frac{\tau}{\alpha_1} + \sigma_1, \dots \frac{t}{\alpha_m} - \frac{\tau}{\alpha_m} + \sigma_m\Big) dt$$

$$= \int_\tau^{t+\tau} \Big[F\Big(\frac{t}{\alpha_1} - \frac{\tau}{\alpha_1} + \sigma_1, \dots \frac{t}{\alpha_m} - \frac{\tau}{\alpha_m} + \sigma_m\Big) - F\Big(\frac{t}{\alpha_1}, \dots \frac{t}{\alpha_m}\Big)\Big] dt + \varphi(t+\tau) - \varphi(\tau)$$

und somit

$$\int_0^t f(t, \sigma)\, dt - (\varphi(t, \sigma) - \varphi(0, \sigma))$$

$$= \int_\tau^{t+\tau} \Big[F\Big(\frac{t}{\alpha_1} - \frac{\tau}{\alpha_1} + \sigma_1, \dots \frac{t}{\alpha_m} - \frac{\tau}{\alpha_m} + \sigma_m\Big) - F\Big(\frac{t}{\alpha_1}, \dots \frac{t}{\alpha_m}\Big)\Big] dt$$

$$+ \Big[\Phi\Big(\frac{t}{\alpha_1} + \frac{\tau}{\alpha_1}, \dots \frac{t}{\alpha_m} + \frac{\tau}{\alpha_m}\Big) - \Phi\Big(\frac{t}{\alpha_1} + \sigma_1, \dots \frac{t}{\alpha_m} + \sigma_m\Big)\Big]$$

$$+ \Big[\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m) - \Phi\Big(\frac{\tau}{\alpha_1}, \frac{\tau}{\alpha_2}, \dots \frac{\tau}{\alpha_m}\Big)\Big].$$

Wir denken uns nunmehr t beliebig aber fest gewählt. Man kann hierauf τ so bestimmen, daß jedes der drei auf der rechten Seite stehenden Glieder absolut beliebig klein wird. Es kann somit die linke Seite durch geeignete Wahl von τ absolut beliebig klein gemacht werden. Nun hängt aber die linke Seite gar nicht von τ ab; sie ist also gleich 0. Somit gilt

$$\int_0^t f(t, \sigma)\, dt = \varphi(t, \sigma) - \varphi(0, \sigma), \qquad \text{q. e. d.}$$

8. Es ist klar, daß das Integral einer im weiteren Sinne periodischen Funktion, deren konstanter Teil gleich 0 ist, nicht notwendig zwischen endlichen Grenzen liegt. Wir wollen ein Beispiel anführen, welches die Richtigkeit dieser Bemerkung dartut. Es möge die Reihe

$$\varphi(t)=\frac{1}{7}\cos(\alpha_1 t)+\frac{1}{7^2}\cos(\alpha_2 t)+\frac{1}{7^3}\cos(\alpha_3 t)+\cdots$$

vorliegen. Hierbei seien die α_ν von der Form $\alpha_\nu = Ma + Nb$, wobei a und b gegebene positive unter einander inkommensurable Größen bezeichnen und M, N ganze Zahlen bedeuten. Ferner seien die α_ν so gewählt, daß

$$\frac{1}{7|\alpha_1|}+\frac{1}{7^2|\alpha_2|}+\cdots+\frac{1}{7^{n-1}|\alpha_{n-1}|}<\frac{1}{3.7^n|\alpha_n|}, \qquad 0<|\alpha_n|<\frac{1}{8^n}.$$

Eine solche Wahl der α-Größen ist offenbar möglich. Die Reihe für $\varphi(t)$ konvergiert gleichmäßig für alle t, und es ist $\varphi(t)$ eine im weiteren Sinne periodische Funktion mit den Perioden $\frac{2\pi}{a}$, $\frac{2\pi}{b}$. Das konstante Glied von $\varphi(t)$ ist gleich 0. $\varphi(t)$ besitzt Ableitungen beliebig hoher Ordnung; dieselben sind ebenfalls im weiteren Sinne periodisch mit den genannten Perioden. Wir haben

$$\int_0^{\frac{\pi}{2|\alpha_n|}}\varphi(t)\,dt=\frac{1}{7\alpha_1}\sin\frac{\alpha_1\pi}{2|\alpha_n|}+\frac{1}{7^2\alpha_2}\sin\frac{\alpha_2\pi}{2|\alpha_n|}+\cdots+\frac{1}{7^{n-1}\alpha_{n-1}}\sin\frac{\alpha_{n-1}\pi}{2|\alpha_n|}$$

$$+\frac{1}{7^n|\alpha_n|}+\int_0^{\frac{\pi}{2|\alpha_n|}}\left(\frac{1}{7^{n+1}}\cos(\alpha_{n+1}t)+\cdots\right)dt,$$

$$\left|\frac{1}{7\alpha_1}\sin\frac{\alpha_1\pi}{2|\alpha_n|}+\frac{1}{7^2\alpha_2}\sin\frac{\alpha_2\pi}{2|\alpha_n|}+\cdots+\frac{1}{7^{n-1}\alpha_{n-1}}\sin\frac{\alpha_{n-1}\pi}{2|\alpha_n|}\right|<\frac{1}{3.7^n|\alpha_n|},$$

$$\left|\frac{1}{7^{n+1}}\cos(\alpha_{n+1}t)+\cdots\right|\leqq\frac{1}{7^{n+1}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{7}}=\frac{1}{7^n.6},$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2|\alpha_n|}}\left(\frac{1}{7^{n+1}}(\cos\alpha_{n+1}.t)+\cdots\right)dt\right|\leqq\frac{1}{7^n.6}\cdot\frac{\pi}{2|\alpha_n|},$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2|\alpha_n|}}\varphi(t)\,dt\right|\geqq\frac{1}{7^n|\alpha_n|}-\frac{1}{3.7^n|\alpha_n|}-\frac{1}{7^n.12}\cdot\frac{\pi}{|\alpha_n|}$$

$$=\frac{1}{7^n|\alpha_n|}\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{12}\right)>\frac{1}{7^n\frac{1}{8^n}}\cdot\frac{1}{3}.$$

Es nimmt daher $\left|\int^t\varphi(t)\,dt\right|$ unter anderem Werte an, die größer sind als

$\left(\frac{8}{7}\right)^n \cdot \frac{1}{3}$, wobei n eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Es kann somit $\int_0^t \varphi(t)\,dt$ keine im weiteren Sinne periodische Funktion sein.

9. *Es sei $f(t)$ eine für alle t definierte im weiteren Sinne mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ periodische Funktion. Der konstante Teil von $f(t)$ sei gleich 0, und $f(t)$ besitze kein zwischen endlichen Grenzen bleibendes Integral. Man kann dann ein solches Phasensystem $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m$ finden, daß $\int_0^t f(t, \sigma)\,dt \gtreqless 0$, und ein solches Phasensystem $s_1, s_2, \ldots s_m$, daß $\int_0^t f(t, s)\,dt \lesseqgtr 0$.* Dieser Satz ist im Hinblick auf das Folgende von Interesse. Der besseren Übersicht wegen verteilen wir den Beweis auf die Abteilungen A, B, C, D.

A. Wir bezeichnen ein Integral von $f(t)$ mit $\psi(t)$. Offenbar ist dann, wie auch τ gewählt sein möge,

$$\psi(t+\tau) - \psi(\tau) = \int_0^t f\left(t, \frac{\tau}{\alpha_1}, \frac{\tau}{\alpha_2}, \ldots \frac{\tau}{\alpha_m}\right) dt.$$

Nimmt nun τ solche Werte $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ an, daß gewisse mit $\left(\frac{\tau_i}{\alpha_1}, \frac{\tau_i}{\alpha_2}, \ldots \frac{\tau_i}{\alpha_m}\right)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ kongruente*) Phasensysteme nach einem Phasensystem $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m$ konvergieren, so gilt für jedes fest gewählte t

$$\operatorname{Lim}\left(\psi(t+\tau) - \psi(\tau)\right) = \int_0^t f(t, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m)\,dt.$$

B. Wir wollen uns versuchsweise vorstellen, es sei gelungen, Größen $s_1, s_2, s_3, \ldots$, sowie die zugehörigen positiven Werte $l_1, l_2, l_3, \ldots$ derart zu bestimmen, daß erstens die $l_1, l_2, l_3, \ldots$ nach ∞ konvergieren und zweitens eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:

α) für $-l_i \lesseqgtr t \lesseqgtr l_i$ gilt $\psi(t+s_i) - \psi(s_i) \gtreqless 0$, $(i=1,2,3,\ldots)$

β) für $-l_i \lesseqgtr t \lesseqgtr l_i$ gilt $\psi(t+s_i) - \psi(s_i) \lesseqgtr 0$, $(i=1,2,3,\ldots)$

γ) für $-l_i \lesseqgtr t \lesseqgtr l_i$ gilt $|\psi(t+s_i) - \psi(s_i)| \lesseqgtr P$, $(i=1,2,3,\ldots)$

wobei P eine Konstante bedeutet.

*) Zwei Phasensysteme heißen kongruent, wenn die entsprechenden Elemente sich um ganze Zahlen unterscheiden.

Wir wollen nun die Konsequenzen dieser Annahmen betrachten. Zunächst ist klar, daß man aus der Reihe der Indizes 1, 2, 3, ... eine neue wachsende Reihe $a, b, c, \ldots$ in der Weise auswählen kann, daß gewisse den Systemen $\left(\frac{s_i}{\alpha_1}, \frac{s_i}{\alpha_2}, \ldots \frac{s_i}{\alpha_m}\right) (i = a, b, c, \ldots)$ kongruente Phasensysteme nach einem Phasensystem $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m$ konvergieren. Nach A. haben wir also für jedes fest gewählte t, wenn der Index i die Werte $a, b, c, \ldots$ durchläuft,

$$\operatorname{Lim} (\psi(t+s_i) - \psi(s_i)) = \int_0^t f(t, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m)\, dt.$$

Im Falle α) ergibt sich hieraus offenbar

$$\int_0^t f(t, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m)\, dt \geqq 0,$$

im Falle β)

$$\int_0^t f(t, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m)\, dt \leqq 0,$$

im Falle γ)

$$\left| \int_0^t f(t, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m)\, dt \right| \leqq P.$$

Im Falle γ) würde somit ein Integral von $f(t, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m)$ zwischen endlichen Grenzen liegen; dasselbe müßte also auch für die Integrale von $f(t)$ stattfinden. Letzteres widerspricht jedoch der Voraussetzung. *Somit kann der Fall γ) nicht eintreten.*

Ferner ist klar, daß unser Satz bewiesen ist, sobald wir das wirkliche Vorkommen sowohl des Falles α) als des Falles β) nachweisen. Dieser Nachweis wird im folgenden geführt. Wir können uns dabei jedoch auf einen der beiden Fälle, etwa den Fall α), beschränken; der andere wird analog behandelt. Man könnte β) auch auf α) zurückführen, indem man an Stelle der Funktion $f(t)$ die Funktion $-f(t)$ betrachtet.

C. Es werde $K > 0$ beliebig angenommen und außerdem ein spezieller t-Wert t_0 gewählt. *Man kann einerseits solche Paare von verschiedenen t_0 übertreffenden t-Werten angeben, daß beim Übergang vom kleineren zum größeren t-Wert $\psi(t)$ um K wächst, andererseits solche, daß beim genannten Übergang $\psi(t)$ um K abnimmt.* Um dies zu beweisen, nehmen wir zunächst versuchsweise an, es gäbe keine Paare von t-Werten der an zweiter Stelle

genannten Art. Ist dann $t'' > t' > t_0$, so gilt immer $\psi(t') - \psi(t'') < K$. In diesem Fall muß jedoch eine solche positive Zahl T existieren, daß in jedem Intervall $t_0 < \mathrm{t} \leqq t \leqq \mathrm{t} + T$ ein derartiges Paar von verschiedenen t-Werten vorkommt, daß beim Übergang vom kleineren zum größeren t-Wert $\psi(t)$ um $2K$ wächst. Andernfalls könnte nämlich der unter B. γ) beschriebene Fall verwirklicht werden,*) was, wie oben gezeigt, nicht geschehen kann. Auf Grund des eben Gesagten erkennen wir nun die Möglichkeit, $t_1, t_2, t_3, t_4 \ldots$ so zu wählen, daß folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
0 < t_2 - t_1 \leqq T \qquad & \psi(t_2) - \psi(t_1) = 2K \\
0 \leqq t_3 - t_2 \leqq T \qquad & \psi(t_3) - \psi(t_2) > -K \\
0 < t_4 - t_3 \leqq T \qquad & \psi(t_4) - \psi(t_3) = 2K \\
0 \leqq t_5 - t_4 \leqq T \qquad & \psi(t_5) - \psi(t_4) > -K \\
0 < t_6 - t_5 \leqq T \qquad & \psi(t_6) - \psi(t_5) = 2K \\
0 \leqq t_7 - t_6 \leqq T \qquad & \psi(t_7) - \psi(t_6) > -K \\
\cdots\cdots\cdots

Es müßte also auch für $n\to\infty$

$$\frac{\psi(t_{2n+1})-\psi(t_1)}{t_{2n+1}-t_1}\to 0$$

gelten. Dies widerspricht dem eben gefundenen Resultat. Die oben versuchsweise gemachte Annahme ist daher abzuweisen.

Um den Rest unserer in C. ausgesprochenen Behauptung zu beweisen, könnten wir analog verfahren. Wir könnten aber auch zu diesem Zweck das eben gefundene Ergebnis auf die Funktion $-f(t)$ anwenden.

D. Wir wählen $K>0$ beliebig und hierauf zwei t-Werte t_1 und $t_2>t_1$ in der Weise, daß $\psi(t_1)-\psi(t_2)=K$. Sodann wählen wir $t_3>t_2$ und $t_4>t_3$ in der Weise, daß $\psi(t_4)-\psi(t_3)=K$. Alles dies ist nach C. ausführbar. d sei ein t-Wert des Intervalles $t_1\leqq t\leqq t_4$, für welchen ψ den kleinsten im genannten Intervall vorkommenden ψ-Wert annimmt. Offenbar haben wir

$$\psi(t_1)-\psi(d)\geqq K, \qquad \psi(t_4)-\psi(d)\geqq K.$$

Wir bestimmen nun die Konstante $\gamma>0$ in der Weise, daß $\gamma\geqq|f(t)|$; sobald $f(t)$ gegeben ist, können wir uns γ fest gewählt denken. Es gilt

$$K\leqq|\psi(t_1)-\psi(d)|\leqq|d-t_1|\gamma, \qquad K\leqq|\psi(t_4)-\psi(d)|\leqq|t_4-d|\cdot\gamma,$$

$$d-t_1\geqq\frac{K}{\gamma}, \qquad t_4-d\geqq\frac{K}{\gamma}.$$

Sobald daher $-\frac{K}{\gamma}\leqq t\leqq\frac{K}{\gamma}$, haben wir $t_1\leqq t+d\leqq t_4$ und somit $\psi(t+d)-\psi(d)\geqq 0$. Bedenken wir nun die bei der Wahl von K herrschende Willkür, so erkennen wir, daß der Fall B.α) in der Tat verwirklicht werden kann. Damit können wir, wie bereits am Schluß von B. hervorgehoben wurde, den Beweis des am Anfang von Nr. 9 ausgesprochenen Satzes als erledigt betrachten.

IV. Die reduzierte Differentialgleichung.

10. Es möge die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varphi(t)x=0 \tag{10.}$$

vorliegen, wobei $\varphi(t)$ eine für alle t definierte im weiteren Sinne periodische

Funktion mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ bedeutet. Indem wir mit $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m$ irgend ein Phasensystem bezeichnen, bilden wir die allgemeinere Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi(t, \sigma)\, x = 0. \tag{11.}$$

Alle Gleichungen vom Typus (11.) sollen mit einander verwandt heißen. Wir erteilen endlich den $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m$ die speziellen Werte $s_1, s_2, \dots s_m$ und erhalten dann die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi(t, s)\, x = 0. \tag{12.}$$

Es sei bekannt, daß die Gleichung (12.) *zwei von einander unabhängige Integrale u und v besitzt, welche für alle t zwischen endlichen Grenzen liegen.* Dann müssen offenbar auch $\frac{du}{dt} = u'$ und $\frac{dv}{dt} = v'$ für alle t zwischen endlichen Grenzen liegen und wir haben $uv' - vu' = c$, wobei c eine von Null verschiedene Konstante bedeutet.

Wir bemerken zunächst, daß die Funktionen $u(t+\tau)$, $v(t+\tau)$ Lösungen der Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(t, s_1 + \frac{\tau}{\alpha_1}, \dots s_m + \frac{\tau}{\alpha_m}\right) x = 0 \tag{13.}$$

sind. Bedeutet $r_1, r_2, \dots r_m$ irgend ein Phasensystem, so existieren nach dem vorigen eine solche Reihe $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ und solche Größen A, B, α, β, daß für $i = 1, 2, 3, \dots$

$$\operatorname{Lim}\left(s_1 + \frac{\tau_i}{\alpha_1} + \nu_{1i}\right) = r_1, \dots \operatorname{Lim}\left(s_m + \frac{\tau_i}{\alpha_m} + \nu_{mi}\right) = r_m,$$

$$\operatorname{Lim} u(\tau_i) = A, \qquad \operatorname{Lim} v(\tau_i) = B, \qquad \operatorname{Lim} u'(\tau_i) = \alpha, \qquad \operatorname{Lim} v'(\tau_i) = \beta$$

gilt; $\nu_{1i}, \nu_{2i}, \dots \nu_{mi}$ bezeichnen hierbei gewisse ganze Zahlen. Wir fassen nun diejenigen Lösungen $g(t)$ und $h(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi(t, r_1, r_2, \dots r_m)\, x = 0 \tag{14.}$$

ins Auge, welche durch die Bedingungen $g(0) = A$, $g'(0) = \alpha$, $h(0) = B$, $h'(0) = \beta$ definiert sind. Diese Lösungen sind von einander unabhängig, da offenbar $A.\beta - B.\alpha = c$ gilt. Wir haben

$$\frac{d^2u(t+\tau_i)}{dt^2} + \varphi\left(t, s_1 + \frac{\tau_i}{\alpha_1}, \dots s_m + \frac{\tau_i}{\alpha_m}\right) u(t+\tau_i) = 0, \tag{15.}$$

$$(16.)\qquad \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \varphi(t, r_1, r_2, \dots r_m)\, g(t) = 0,$$

$$(17.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}[u(t+\tau_i) - g(t)] + \varphi(t, r_1, r_2, \dots r_m)[u(t+\tau_i) - g(t)] \\ \qquad + [\varphi\left(t, s_1 + \dfrac{\tau_i}{\alpha_1}, \dots s_m + \dfrac{\tau_i}{\alpha_m}\right) - \varphi(t, r_1, r_2, \dots r_m)]\, u(t+\tau_i) = 0. \end{cases}$$

Man kann den Absolutwert des letzten Gliedes der linken Seite für alle t beliebig klein machen, indem man den Index i genügend groß wählt. Durch dasselbe Mittel können auch $|u(\tau_i) - g(0)|$ und $|u'(\tau_i) - g'(0)|$ beliebig klein gemacht werden. *Wählt man daher*) ein beliebiges endliches t-Intervall, so kann man erreichen, daß $|u(t+\tau_i) - g(t)|$ und $|u'(t+\tau_i) - g'(t)|$ in diesem Intervall beliebig klein sind; es genügt zu diesem Zweck, den Index i genügend groß zu wählen. Analoges läßt sich bezüglich der Funktionen $v(t)$ und $h(t)$ sagen. Wir können außerdem erreichen, daß $s_1 + \frac{\tau_i}{\alpha_1}, \dots s_m + \frac{\tau_i}{\alpha_m}$ sich von $r_1, r_2, \dots r_m$, abgesehen von ganzen Zahlen, beliebig wenig unterscheiden; wiederum genügt die Beschränkung der Wahl von i auf genügend große Werte.*

Auf Grund des eben gewonnenen Resultats erkennen wir nun leicht die Berechtigung folgender Aussage: *Die Eigenschaft, welche wir am Anfang dieser Nummer für die Gleichung* (12.) *voraussetzten, kommt auch jeder Gleichung vom Typus* (11.) *zu.*

11. Indem wir alle Bezeichnungen der vorigen Nummer beibehalten, wählen wir drei beliebige Konstanten c_1, c_2, c_3 und bilden

$$(18.)\quad \begin{cases} c_1 u^2 + c_2 uv + c_3 v^2 = f, \\ 2c_1 uu' + c_2(uv' + vu') + 2c_3 vv' = f', \\ c_1(2u'^2 - 2u^2\varphi(t,s)) + c_2(2u'v' - 2uv\varphi(t,s)) + c_3(2v'^2 - 2v^2\varphi(t,s)) = f'', \end{cases}$$

wobei die Striche oberhalb u, v und f zur Bezeichnung der entsprechenden Ableitungen dienen. Die Determinante der Koeffizienten von c_1, c_2, c_3 auf der linken Seite von (18.) ist, wie man leicht sieht, gleich $2(uv' - vu')^3 = 2c^3$, wobei c dieselbe Bedeutung hat wie in der vorigen Nummer. Wählt man c_1, c_2, c_3 in verschiedener Weise, so ergibt sich eine Schar von Funktionen f, wobei c_1, c_2, c_3 die Rolle von Parametern spielen. Es ist klar, daß wir dieselbe Schar von Funktionen erhalten, wenn wir an Stelle von u, v zwei

*) Vgl. etwa den in § 1 meiner oben erwähnten Doktordissertation dargestellten allgemeinen Satz.

beliebige Lösungen der Gleichung (12.) benutzen, wofern nur die gebrauchten Lösungen von einander unabhängig sind.

Wir wählen nun irgend eine Zahl $p>0$ fest aus. Da $|u|, |v|$ nicht gleichzeitig beliebig klein werden können, so gibt es in der eben besprochenen Schar Funktionen f, welche für alle t $\overline{\overline{>}}p$ sind. Bezeichnet f_1 eine bestimmte der eben genannten Bedingung genügende Funktion, welche den Parametern c_1', c_2', c_3' entspricht, so kann eine solche Konstante K angegeben werden, daß für alle t $\sqrt{f_1^2+f_1'^2+f_1''^2}\overline{\overline{<}}K$ gilt. Wir ändern nunmehr die Phasen, indem wir von der Gleichung (12.) zur Gleichung (14.) übergehen. Für diese letztere Gleichung bestimmen wir eine Schar von Funktionen in derselben Weise, wie es eben für die Gleichung (12.) geschah; dabei wollen wir die in der vorigen Nummer eingeführten Lösungen $g(t)$ und $h(t)$ zugrunde legen. Aus der zu (14.) gehörenden Schar wählen wir dann diejenige Funktion ψ_1, welche den oben bereits genannten Parametern c_1', c_2', c_3' entspricht; es ist also $\psi_1 = c_1' g^2 + c_2' gh + c_3' h^2$. Auf Grund der in der vorigen Nummer entwickelten Resultate erkennen wir nun, daß für alle t

$$\psi_1 \overline{\overline{>}} p, \qquad \sqrt{\psi_1^2+\psi_1'^2+\psi_1''^2}\overline{\overline{<}}K$$

gilt, wobei p und K die oben genannten Konstanten sind. Wir sind jetzt zu folgender Aussage berechtigt: *Genügt eine aus der einer Gleichung vom Typus* (11.) *angehörenden Schar stammende Funktion* $f(t)$ *den Bedingungen*

$$f(t)\overline{\overline{>}}a, \qquad \sqrt{f^2+f'^2+f''^2}\overline{\overline{<}}b, \qquad (a>0 \text{ und } b \text{ sind Konstanten})$$

so enthält die einer anderen Gleichung vom Typus (11.) (*d. h. einer mit der vorigen verwandten Gleichung*) *angehörende Schar sicher eine denselben Bedingungen genügende Funktion. Es gibt auch immer Funktionen* f *der eben genannten Art, wenn nur die Konstanten* a *und* b *geeignet angenommen sind; und zwar kann für* a *jede positive Zahl gewählt werden.*

12. Wir kehren nun wieder zur Gleichung (12.) zurück. Nachdem wir $p>0$ gewählt, fassen wir diejenigen Funktionen f der zu (12.) gehörenden Schar ins Auge, welche der Bedingung $f\overline{\overline{>}}p$ für alle t genügen. Für jede einzelne dieser Funktionen f besitzt $\sqrt{f^2+f'^2+f''^2}$ eine obere Grenze, welche wir mit $G(f)$ bezeichnen. Die Größen $G(f)$ besitzen eine untere Grenze g. *Wir wollen zeigen, daß man* f *so wählen kann, daß* $G(f)=g$ *gilt.* Zu diesem Zwecke denken wir uns Funktionen f der eben geschilderten

Art $f_1, f_2, f_3, \ldots$ so bestimmt, daß $\lim_{i\to\infty} G(f_i) = g$; dies ist immer möglich. Die Systeme $(f_i(0), f_i'(0), f_i''(0))$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ haben mindestens eine Häufungsstelle (q, q', q''). Auf Grund dessen, was wir in Nr. 11 über die Determinante der Koeffizienten von c_1, c_2, c_3 in (18.) sagten, erkennen wir, daß man eine Funktion F aus der zu (12.) gehörenden Schar finden kann, für welche $F(0) = q$, $F'(0) = q'$, $F''(0) = q''$ gilt. $\psi_i(t) = f_i(t) - F(t)$ ist ebenfalls eine Funktion der eben genannten Schar; nach dem vorigen kann man $|\psi_i(0)|$, $|\psi_i'(0)|$, $|\psi_i''(0)|$ beliebig klein machen, indem man den Index i geeignet wählt. Dabei kann i größer als eine beliebig gewählte Zahl angenommen werden. Bezeichnen c_1^i, c_2^i, c_3^i die Parameter von $\psi_i(t)$, so folgt, daß man $|c_1^i|$, $|c_2^i|$, $|c_3^i|$ durch geeignete Wahl des Index i beliebig klein machen kann. Wiederum kann i dabei größer als eine beliebig gewählte Zahl angenommen werden. Hieraus schließt man weiter, daß $|\psi_i(t)|$, $|\psi_i'(t)|$, $|\psi_i''(t)|$ gleichzeitig für alle t beliebig klein gemacht werden können, indem der Index i geeignet gewählt wird. i kann dabei größer als eine beliebig gewählte Zahl angenommen werden. Auf Grund hiervon erkennen wir zunächst, daß für alle t $F(t) \overline{\overline{>}} p$ gelten muß. F gehört also zu den am Anfang dieser Nummer 12 charakterisierten Funktionen. Wir haben somit $G(F) \overline{\overline{>}} g$. Wäre nun $G(F) > g$, so müßte $\sqrt{F^2 + F'^2 + F''^2}$ für einen gewissen t-Wert größer als g, also etwa gleich $g + \delta$ $(\delta > 0)$ sein. Sobald aber i genügend groß ist, haben wir $G(f_i) < g + \frac{\delta}{2}$ und folglich für alle t $\sqrt{f_i^2 + f_i'^2 + f_i''^2} < g + \frac{\delta}{2}$. Für einen gewissen t-Wert haben wir also für genügend große i

$$|\sqrt{F^2 + F'^2 + F''^2} - \sqrt{f_i^2 + f_i'^2 + f_i''^2}| > \frac{\delta}{2}.$$

Dieses Resultat ist jedoch mit dem oben bezüglich $\psi_i(t)$ Gesagten unvereinbar. Also ist $G(F) = g$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Geht man nicht von der Gleichung (12.) *aus, sondern von einer mit* (12.) *verwandten Gleichung und wählt für* p *denselben Wert wie im Fall der Gleichung* (12.), *so erhält man für die neue Gleichung genau denselben Wert von* g, *wie für die Gleichung* (12.). Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt sofort aus dem am Schlusse der Nummer 11 formulierten Resultat.

13. Wir kehren wieder zu der Gleichung (12.) zurück und wollen zeigen, *daß es nur eine Funktion* f *der am Anfang von* 12. *charakterisierten Art gibt, für welche* $G(f) = g$ *gilt.* Zu diesem Zweck nehmen wir an, es

seien f_1 und f_2 f-Funktionen der genannten Art und es gelte $G(f_1)=G(f_2)=g$. Dann ist $\omega=\frac{f_1+f_2}{2}$ eine Funktion aus der zu (12.) gehörenden Schar. Wir haben außerdem $\omega \geqq p$. Somit ist auch ω eine f-Funktion der genannten Art. Es ist ferner

$$\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)^2+\left(\frac{f_1'+f_2'}{2}\right)^2+\left(\frac{f_1''+f_2''}{2}\right)^2+\left(\frac{f_1-f_2}{2}\right)^2+\left(\frac{f_1'-f_2'}{2}\right)^2+\left(\frac{f_1''-f_2''}{2}\right)^2$$

$$=\frac{f_1^2+f_1'^2+f_1''^2+f_2^2+f_2'^2+f_2''^2}{2} \leqq g^2.$$

Also wird

$$\omega^2+\omega'^2+\omega''^2 \leqq g^2-(\chi^2+\chi'^2+\chi''^2),$$

wobei $\chi=\frac{f_1-f_2}{2}$ eine Funktion aus der zu (12.) gehörenden Schar bedeutet. Bezeichnen wir noch die untere Grenze von $\chi^2+\chi'^2+\chi''^2$ (für variable t) mit q^2, so haben wir

$$\sqrt{\omega^2+\omega'^2+\omega''^2} \leqq \sqrt{g^2-q^2}, \qquad g \leqq G(\omega) \leqq \sqrt{g^2-q^2}, \qquad q=0.^*)$$

Es folgt hieraus, daß $|\chi|, |\chi'|, |\chi''|$ gleichzeitig beliebig kleine Werte annehmen können. Bezeichnen wir nun für den Augenblick mit c_1, c_2, c_3 die Parameterwerte für die Funktion χ, erinnern wir uns ferner dessen, was wir im Anschluß an die Gleichungen (18.) gesagt haben, so sehen wir, daß $c_1=c_2=c_3=0$ sein muß. Wir haben also $\chi=0$ d. h. $f_1=f_2$. Damit ist die Richtigkeit unserer Behauptung bewiesen. Wir können jetzt sagen: *Haben wir $p>0$ fest gewählt, so gibt es in den der Gleichung* (12.) *sowie ihren verwandten entsprechenden Scharen stets eine und nur eine Funktion, welche den Bedingungen $f \geqq p$, $G(f)=g$ genüge leistet.*

14. Wir werden jetzt zeigen, *daß diese Funktionen, ebenso wie ihre Ableitungen erster und zweiter Ordnung, im weiteren Sinne mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ periodisch sind.*

Es mögen für das Phasensystem $s_1, s_2, \ldots s_m$ die Funktion und ihre Ableitungen mit f, f', f'', die Parameter mit c_1, c_2, c_3 bezeichnet werden. Wir nehmen versuchsweise an, f, f', f'' seien nicht sämtlich im weiteren Sinne periodisch mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. Dann kann man t-Werte ϑ und θ so auswählen, daß $\frac{\vartheta-\theta}{\alpha_1}, \ldots \frac{\vartheta-\theta}{\alpha_m}$ sich von ganzen Zahlen beliebig wenig unterscheiden, während

*) Nach dem obigen ist nämlich $g \geqq 0$.

(19.) $\sqrt{[f(\vartheta)-f(\theta)]^2+[f'(\vartheta)-f'(\theta)]^2+[f''(\vartheta)-f''(\theta)]^2}>q>0$

(q bedeutet eine gewisse positive Konstante, welche nicht von der Wahl der ϑ, θ abhängt)

gilt. Wir wählen eine unendliche Reihe von Paaren ϑ, θ, für welche die oben genannten Unterschiede von ganzen Zahlen nach 0 konvergieren, während stets (19.) gilt. Setzt man für ϑ, θ die genannten Paare, so hat die Stelle mit den 8 Koordinaten $u(\vartheta)$, $v(\vartheta)$, $u'(\vartheta)$, $v'(\vartheta)$, $u(\theta)$, $v(\theta)$, $u'(\theta)$, $v'(\theta)$ eine Häufungsstelle $u_\vartheta, v_\vartheta, u'_\vartheta, v'_\vartheta, u_\theta, v_\theta, u'_\theta, v'_\theta$. Man kann aus der Reihe der ϑ, θ eine zweite unendliche Reihe so wählen, daß die $u(\vartheta)$, $v(\vartheta)$, $u'(\vartheta)$, $v'(\vartheta)$, $u(\theta)$, $v(\theta)$, $u'(\theta)$, $v'(\theta)$ nach $u_\vartheta, v_\vartheta, u'_\vartheta, v'_\vartheta, u_\theta, v_\theta, u'_\theta, v'_\theta$ konvergieren. Da $u(t).\, v'(t)-u'(t).\, v(t)=c\neq 0$, so ist $u_\vartheta.\, v'_\vartheta-u'_\vartheta.\, v_\vartheta = u_\theta.\, v'_\theta-u'_\theta.\, v_\theta=c$.

Die mit $s_1+\frac{\vartheta}{\alpha_1}, \ldots s_m+\frac{\vartheta}{\alpha_m}$ kongruenten Phasensysteme haben eine Häufungsstelle $s'_1, \ldots s'_m$, wobei auch $s'_1, \ldots s'_m$ ein Phasensystem darstellen. Wir können aus der zuletzt erwähnten ϑ-Reihe eine weitere unendliche Reihe so wählen, daß gewisse mit $s_1+\frac{\vartheta}{\alpha_1}, \ldots s_m+\frac{\vartheta}{\alpha_m}$ kongruente Phasensysteme nach $s'_1, \ldots s'_m$ konvergieren. Wählen wir die entsprechenden Elemente der θ-Reihe, so konvergieren gewisse mit $s_1+\frac{\theta}{\alpha_1}, \ldots s_m+\frac{\theta}{\alpha_m}$ kongruente Phasensysteme ebenfalls nach $s'_1, \ldots s'_m$.

Wir fassen die Gleichung mit den Phasen $s'_1, \ldots s'_m$ ins Auge und wählen diejenigen zwei unabhängigen Lösungen derselben U, V, die durch $U(0)=u_\vartheta$, $U'(0)=u'_\vartheta$ und $V(0)=v_\vartheta$, $V'(0)=v'_\vartheta$ charakterisiert sind. Dann bilden wir

$$\Phi = c_1 U^2+c_2 U V+c_3 V^2,$$
$$\Phi' = c_1 2 U U'+c_2(U V'+U' V)+c_3 2 V V',$$
$$\Phi''=c_1(2U'^2-2U^2\varphi(t,s'))+c_2(2U'V'-2UV\varphi(t,s'))+c_3(2V'^2-2V^2\varphi(t,s')).$$

Hierbei bezeichnen c_1, c_2, c_3 die am Anfang unserer Nummer erwähnten Parameter. Wir bedenken nun, daß $u(t+\vartheta)$, $v(t+\vartheta)$ Lösungen der Gleichung mit den Phasen $s_1+\frac{\vartheta}{\alpha_1}, \ldots s_m+\frac{\vartheta}{\alpha_m}$ sind. Indem man in der ϑ-Reihe genügend weit geht, kann man erreichen, daß $u(\vartheta)$, $u'(\vartheta)$ und $v(\vartheta)$, $v'(\vartheta)$ den $U(0)$, $U'(0)$ und $V(0)$, $V'(0)$ beliebig nahe liegen, während die Phasensysteme $s_1+\frac{\vartheta}{\alpha_1}, \ldots s_m+\frac{\vartheta}{\alpha_m}$ dem Phasensystem $s'_1, \ldots s'_m$ (abgesehen von ganzen Zahlen)

beliebig nahe liegen. Man kann also durch genügend weite Fortsetzung der ϑ-Reihe erreichen, daß $u(t+\vartheta)$, $u'(t+\vartheta)$ und $v(t+\vartheta)$, $v'(t+\vartheta)$ sich in einem vorher beliebig ausgewählten t-Intervall den Funktionen $U(t)$, $U'(t)$ und $V(t)$, $V'(t)$ beliebig nahe anschmiegen. (Man vgl. die Betrachtungen in Nr. 10.) Dasselbe kann man hinsichtlich $\varphi(t+\vartheta, s)$ einerseits, und $\varphi(t, s')$ andererseits erreichen. Hieraus folgt dann weiter, daß man entsprechendes für $f(t+\vartheta)$, $f'(t+\vartheta)$, $f''(t+\vartheta)$ einerseits, und $\Phi(t)$, $\Phi'(t)$, $\Phi''(t)$ andererseits erreichen kann. Da nun $f(t+\vartheta)\overline{\overline{>}}p$, so ist folglich $\Phi(t)\overline{\overline{>}}p$, und da

$$\sqrt{f((t+\vartheta))^2+(f'(t+\vartheta))^2+(f''(t+\vartheta))^2}\overline{\overline{<}}g,$$

so auch

$$\sqrt{(\Phi(t))^2+(\Phi'(t))^2+(\Phi''(t))^2}\overline{\overline{<}}g.$$

Somit ist $G(\Phi)\overline{\overline{<}}g$. Andererseits ist $G(\Phi)\overline{\overline{>}}g$ und daher $G(\Phi)=g$. Hieraus folgt, daß $\Phi(t)$ nichts anderes ist als die von uns im vorhergehenden eingeführte spezielle f-Funktion für das Phasensystem $s'_1, \ldots s'_m$. Wir bezeichnen, um dies anzudeuten, $\Phi(t)=f_{s'}(t)$, $\Phi'(t)=f'_{s'}(t)$, $\Phi''(t)=f''_{s'}(t)$.

Wir wählen nun die beiden unabhängigen Lösungen L, M der Gleichung mit den Phasen $s'_1, \ldots s'_m$, die durch $L(0)=u_0$, $L'(0)=u'_0$ und $M(0)=v_0$, $M'(0)=v'_0$ charakterisiert sind. Dann bilden wir

$$\begin{aligned}
\Psi &= c_1 L^2 + c_2 L M + c_3 M^2,\\
\Psi' &= c_1 2 L L' + c_2 (L M' + L' M) + c_3 2 M M',\\
\Psi'' &= c_1 (2 L'^2 - 2 L^2 \varphi(t, s')) + c_2 (2 L' M' - 2 L M \varphi(t, s'))\\
&\qquad + c_3 (2 M'^2 - 2 M^2 \varphi(t, s')).
\end{aligned}$$

Genau wie für die Funktionen Φ, Φ', Φ'' zeigen wir, daß

$$\Psi(t)=f_{s'}(t), \qquad \Psi'(t)=f'_{s'}(t), \qquad \Psi''(t)=f''_{s'}(t).$$

Bei Fortsetzung der ϑ-Reihe und θ-Reihe haben wir

$$\begin{aligned}
f(\vartheta) &\to c_1 u_\vartheta^2 + c_2 u_\vartheta v_\vartheta + c_3 v_\vartheta^2 = \Phi(0) = f_{s'}(0),\\
f'(\vartheta) &\to c_1 2 u_\vartheta u'_\vartheta + c_2 (u_\vartheta v'_\vartheta + u'_\vartheta v_\vartheta) + c_3 2 v_\vartheta v'_\vartheta = \Phi'(0) = f'_{s'}(0),\\
f''(\vartheta) &\to c_1 (2 u'^2_\vartheta - 2 u^2_\vartheta \varphi(0, s')) + c_2 (2 u'_\vartheta v'_\vartheta - 2 u_\vartheta v_\vartheta \varphi(0, s'))\\
&\qquad + c_3 (2 v'^2_\vartheta - 2 v^2_\vartheta \varphi(0, s')) = \Phi''(0) = f''_{s'}(0),
\end{aligned}$$

$$f(\theta) \to \Psi(0) = f_{s'}(0), \qquad f'(\theta) \to \Psi'(0) = f'_{s'}(0), \qquad f''(\theta) \to \Psi''(0) = f''_{s'}(0)$$

$$\operatorname{Lim} \sqrt{(f(\vartheta)-f(\theta))^2+(f'(\vartheta)-f'(\theta))^2+(f''(\vartheta)-f''(\theta))^2} = 0.$$

Nun ist aber die links stehende Wurzel stets $\geqq q > 0$. Somit sind wir zu einem Widerspruch gelangt. Wir müssen daher unsere versuchsweise gemachte Annahme aufgeben. Es sind daher f, f', f'' sämtlich im weiteren Sinne periodisch mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$.

Wir haben uns jetzt von der Richtigkeit des folgenden Satzes überzeugt. *Es seien die zu Anfang der Nummer 10 formulierten Voraussetzungen erfüllt; es sei ferner eine positive Zahl p beliebig gewählt. Es existieren dann drei Konstanten g_1, g_2, g_3 von der Beschaffenheit, daß die Funktion*

$$f = g_1 u^2 + 2 g_2 uv + g_3 v^2$$

der Bedingung $f \geqq p$ genügt und daß f, f', f'' im weiteren Sinne periodische Funktionen mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ sind.

15. Im folgenden benutzen wir den Umstand, daß man die lineare Differentialgleichung $\frac{d^2x}{dt^2} + Xx = 0$ „integrieren“ kann, wenn eine Funktion $F(t)$ bekannt ist, von der man weiß, daß sie in der Form $k_1 u^2 + k_2 uv + k_3 v^2$ darstellbar ist. (u, v sind zwei unabhängige Lösungen, k_1, k_2, k_3 Konstanten, die nicht sämtlich verschwinden.)

Indem wir die am Schlusse der vorigen Nummer gebrauchten Bezeichnungen beibehalten, beweisen wir zunächst, daß $g_1 g_3 - g_2^2 > 0$ ist. Wir haben, indem wir der Kürze wegen für $\varphi(t, s)$ bloß φ schreiben,

$$\begin{aligned} f &= g_1 u^2 + 2 g_2 uv + g_3 v^2, \\ f' &= 2[g_1 uu' + g_2(uv' + vu') + g_3 vv'], \\ f'' &= 2[g_1(u'^2 - u^2\varphi) + 2 g_2(u'v' - uv\varphi) + g_3(v'^2 - v^2\varphi)] \\ &= 2(g_1 u'^2 + 2 g_2 u'v' + g_3 v'^2) - 2\varphi f. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, wenn die Gleichung $uv' - u'v = c$ berücksichtigt wird,

$$\frac{2ff'' - f'f'}{4} = (g_1 g_3 - g_2^2) c^2 - \varphi f^2.$$

Wir machen nun zunächst versuchsweise die Annahme $g_1 g_3 - g_2^2 < 0$. Wir setzen, indem wir mit a irgend eine Konstante bezeichnen,

$$z = \sqrt{f}\, e^{|c|\sqrt{g_2^2 - g_1 g_3}\int_a^t \frac{dt}{f}}, \qquad \sigma = |c|\sqrt{g_2^2 - g_1 g_3}.$$

Dann ergibt sich

$$\frac{d^2z}{dt^2}=z\left[\frac{2f''f-f'f'+4\sigma^2}{4f^2}\right]=-\varphi\cdot z.$$

Es ist also z eine Lösung der Differentialgleichung (12.). Wir finden

$$\frac{\log z-\log\sqrt{f}}{|c|\sqrt{g_2^2-g_1g_3}}=\int_a^t\frac{dt}{f}.$$

Da für alle t z zwischen endlichen Grenzen bleibt und $f>p$ gilt, so ist für alle t

$$\int_a^t\frac{dt}{f}\leqq C,$$

wobei C eine Konstante bedeutet. Nun haben wir aber $f<K$, wobei K eine positive Konstante ist. Für $t>a$ finden wir also

$$\int_a^t\frac{dt}{f}>\int_a^t\frac{dt}{K}=\frac{1}{K}(t-a).$$

Somit kann nicht für alle t $\int_a^t\frac{dt}{f}\leqq C$ gelten. Infolge des auftretenden Widerspruchs müssen wir unsere versuchsweise gemachte Annahme fallen lassen.

Wir machen nun *zweitens* versuchsweise die Annahme $g_1g_3-g_2^2=0$. In diesem Fall setzen wir $z=\sqrt{f}$ und erhalten

$$\frac{d^2z}{dt^2}=z\cdot\frac{2ff''-f'f'}{4f^2}=-\varphi\cdot z.$$

Also ist $\sqrt{f}$ eine Lösung der Gleichung (12.). Eine zweite von der vorigen unabhängige Lösung ist

$$\sqrt{f}\int_a^t\frac{dt}{f}.$$

Da unsere Gleichung nur endliche Lösungen besitzt, so gilt für alle t

$$\sqrt{f}\int_a^t\frac{dt}{f}<G,$$

wobei G eine positive Konstante bedeutet. Da immer $f \geqq p$, so haben wir für alle t

$$\int_a^t \frac{dt}{f} < \frac{G}{\sqrt{p}}.$$

Daß dies unmöglich ist, erkennen wir, wie im vorhergehenden Fall. Wir müssen daher unsere versuchsweise gemachte Annahme aufgeben. Somit ist $g_1 g_3 - g_2^2 > 0$.

Wir setzen nunmehr

$$z = \sqrt{f} \cos\Big[c\sqrt{g_1 g_3 - g_2^2} \int_a^t \frac{dt}{f} + k\Big],$$

wobei k, a irgendwelche Konstanten sind. Dann ist

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = z\Big(\frac{2ff'' - f'f' - 4c^2(g_1 g_3 - g_2^2)}{4f^2}\Big) = z(-\varphi).$$

Somit ist z eine Lösung der Gleichung (12.). Die allgemeine Lösung unserer Gleichung hat also die Form

$$x = c_1\sqrt{f}\cos\Big(h\int_a^t \frac{dt}{f}\Big) + c_2\sqrt{f}\sin\Big(h\int_a^t \frac{dt}{f}\Big),$$

wobei $h = c\sqrt{g_1 g_3 - g_2^2}$ ist. Setzen wir noch $\frac{|h|}{f} = R$, so ist R eine im weiteren Sinne periodische Funktion mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. Sie besitzt Ableitungen R' und R'', von denen das gleiche gilt. R ist für alle t $\geqq$ als eine positive Konstante. Die allgemeine Lösung wird

$$x = k_1 \frac{\cos\int_a^t R\,dt}{\sqrt{R}} + k_2 \frac{\sin\int_a^t R\,dt}{\sqrt{R}}. \tag{20.}$$

Statt dessen können wir auch schreiben

$$x = \frac{k}{\sqrt{R}}\cos\Big(\int_0^t R\,dt + c_1\Big),$$

wobei k und c_1 willkürliche Konstanten sind. Aus den Eigenschaften von R folgt, daß $\int_u^0 R\,dt$ eine Größe ist, die mit wachsendem u abnimmt und

jeden reellen Wert einmal annimmt. Man kann hiernach das allgemeine Integral in der Form

$$x = \frac{k}{\sqrt{R}} \cos \int_c^t R\,dt \tag{21.}$$

schreiben, wobei k und c willkürliche Konstanten sind.

V. Die reduzierte Differentialgleichung (Schluß).

16. Es möge die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Phi(t)x = 0 \tag{22.}$$

vorliegen, wobei $\Phi(t)$ eine für alle t definierte im weiteren Sinne periodische Funktion mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ bedeutet. *Wir machen die Voraussetzung, daß die Gleichung* (22.) *zwei unabhängige, im weiteren Sinne mit den Perioden* $b_1, b_2, \ldots b_\mu$ *periodische Lösungen besitzt.* Denselben Charakter haben dann alle Lösungen von (22.). Da infolge der genannten Annahme die Resultate des vorigen Kapitels anwendbar sind, so können wir zwei unabhängige Lösungen in der Form

$$u = \frac{1}{\sqrt{R}} \cos \int_0^t R\,dt, \qquad v = \frac{1}{\sqrt{R}} \sin \int_0^t R\,dt$$

darstellen. Hierbei ist R eine im weiteren Sinne periodische Funktion mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. Sie besitzt Ableitungen R' und R'', von denen das gleiche gilt. R ist für alle $t \gtreqless$ als eine positive Konstante. Wir können nach dem Gesagten die positiven Konstanten a, b so gewählt denken, daß für alle t $a \leqq R \leqq b$ gilt.

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein

$$r = \frac{1}{\sqrt{R}} = \sqrt{u^2 + v^2}, \qquad \varphi = \int_0^t R\,dt.$$

φ wächst mit wachsendem t, und wir haben $|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqq b\,|t_2 - t_1|$. Liegen $\frac{t_1 - t_2}{b_1}, \ldots \frac{t_1 - t_2}{b_\mu}$ ganzen Zahlen genügend nahe, so werden gemäß der zu Anfang dieser Nummer formulierten Voraussetzung

$$A = r_1 \cos \varphi_1 - r_2 \cos \varphi_2 \qquad \text{und} \qquad B = r_1 \sin \varphi_1 - r_2 \sin \varphi_2$$

absolut beliebig klein.*) Dasselbe gilt hiernach von

$$A \cdot r_2 \sin \varphi_2 - B \cdot r_2 \cdot \cos \varphi_2 = r_1 r_2 \sin (\varphi_2 - \varphi_1)$$

und

$$\begin{aligned} A \cdot r_2 \cos \varphi_2 + B \cdot r_2 \sin \varphi_2 &= r_1 r_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1) - r_2^2 \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - 1] + r_2 (r_1 - r_2). \end{aligned}$$

Dasselbe gilt also auch, wie leicht zu sehen, von $\sin (\varphi_2 - \varphi_1)$ und $\cos (\varphi_2 - \varphi_1) - 1$. Somit wird auch der Unterschied von $\varphi_2 - \varphi_1$ von einem Vielfachen von 2π beliebig klein. Liegen also $\frac{T}{b_1}, \ldots \frac{T}{b_\mu}$ $(T \geqq 0)$ ganzen Zahlen genügend nahe, so haben wir $\varphi(t+T) - \varphi(t) = n \cdot 2\pi + \varepsilon$, wobei $|\varepsilon|$ beliebig klein ist. Ist T in der Weise fest gewählt, daß immer $|\varepsilon| < \frac{\pi}{2}$ angenommen werden kann, so folgt aus der Stetigkeit von φ, daß für alle t n denselben T entsprechenden Wert hat. Es sei nun $T > 1$ in bestimmter Weise so gewählt, daß $|\varepsilon| < q$ gilt, wobei q eine beliebige der Bedingung $q \leqq \frac{\pi}{2}$ genügende positive Zahl bedeutet.**) Wir haben

$$\begin{aligned} &\varphi(t+T) - \varphi(t) = n.2\pi + \varepsilon_1, \\ &\varphi(t+2T) - \varphi(t+T) = n.2\pi + \varepsilon_2, \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &\varphi(t+\nu T) - \varphi(t+(\nu-1)T) = n.2\pi + \varepsilon_\nu, \\ &\varphi(t+\nu T) - \varphi(t) = \nu \left[n.2\pi + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_\nu}{\nu} \right], \\ &|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \ldots |\varepsilon_\nu| < q. \end{aligned}$$

Ist nun $\theta = \nu . T + \vartheta$ (die ganze Zahl $\nu > 0$, $0 \leqq \vartheta < T$), so wird

$$\begin{aligned} \varphi(t+\theta) - \varphi(t) &= \varphi(t+\theta) - \varphi(t+\nu T) + \varphi(t+\nu T) - \varphi(t) \\ &= \nu [n.2\pi + \{q\}] + \{b|\vartheta|\}, \end{aligned}$$

($\{z\}$ bedeutet eine Zahl, deren Absolutwert $\leqq z$).

Somit

$$\frac{\varphi(t+\theta) - \varphi(t)}{\theta} = \frac{n.2\pi + \{q\} + \left\{\frac{bT}{\nu}\right\}}{T + \left\{\frac{T}{\nu}\right\}} = \frac{n\frac{2\pi}{T} + \left\{\frac{b}{\nu}\right\}}{1 + \left\{\frac{1}{\nu}\right\}} + \frac{\{q\}}{T + \left\{\frac{T}{\nu}\right\}}.$$

---

*) Die Indices 1 und 2 beziehen sich auf t_1 und t_2.

**) Eine solche Wahl von T ist immer möglich.

Wenn ν genügend groß ist, so haben wir

$$\frac{\varphi(t+\theta)-\varphi(t)}{\theta} = n.\frac{2\pi}{T} + \{2q\}.$$

Dies tritt immer ein, wenn $\theta > K$, wobei K eine gewisse positive Konstante bedeutet.*) Ist $\theta_1 > K$, $\theta_2 > K$, so gilt

$$\left|\frac{\varphi(t_1+\theta_1)-\varphi(t_1)}{\theta_1} - \frac{\varphi(t_2+\theta_2)-\varphi(t_2)}{\theta_2}\right| \leqq 4q. \tag{23.}$$

Wir sind jetzt zu folgender Aussage berechtigt: *Es sei q eine beliebig gewählte positive Konstante. Es gibt dann eine positive, q entsprechende Konstante K von der Beschaffenheit, daß die Ungleichung* (23.) *stets gilt, sobald θ_1 und θ_2 größer als K sind, welche Werte im übrigen t_1, t_2, θ_1, θ_2 auch haben mögen.* Hieraus schließen wir: *Es gibt eine solche Zahl σ, daß man*

$$\left|\frac{\varphi(t+\theta)-\varphi(t)}{\theta} - \sigma\right|$$

beliebig klein machen kann (und zwar gleichzeitig für alle t), indem man θ genügend groß wählt.

Um dies zu begründen, mögen θ', θ'', θ'''... so angenommen sein, daß sie nach ∞ konvergieren. Man wähle, θ', θ'', θ''' usw. entsprechend, t', t'', t'''... nach Belieben. Dann konvergieren

$$\frac{\varphi(t'+\theta')-\varphi(t')}{\theta'}, \qquad \frac{\varphi(t''+\theta'')-\varphi(t'')}{\theta''}\ldots$$

nach einer bestimmten Zahl; denn die Unterschiede zweier Glieder der letzten Reihe können absolut beliebig klein gemacht werden, indem man eine genügend große Zahl der ersten Glieder ausschließt. Die genannte Grenze sei σ. Es werde nun $\varkappa > 0$ beliebig gewählt. Wir bestimmen dann $k > 0$ in der Weise, daß

$$\left|\frac{\varphi(t_1+\theta_1)-\varphi(t_1)}{\theta_1} - \frac{\varphi(t_2+\theta_2)-\varphi(t_2)}{\theta_2}\right| \leqq \frac{\varkappa}{2},$$

wenn $\theta_1 > k$ und $\theta_2 > k$. Ferner bestimmen wir einen so großen Index ϱ, daß das Glied

$$\frac{\varphi(t^\varrho+\theta^\varrho)-\varphi(t^\varrho)}{\theta^\varrho}$$

---

*) Wir denken uns K so gewählt, daß alle Zahlen, die $> K$ sind, θ-Werte darstellen.

aus der vorhin genannten Reihe den Bedingungen

$$\left|\frac{\varphi(t^\varrho+\theta^\varrho)-\varphi(t^\varrho)}{\theta^\varrho}-\sigma\right|<\frac{\varkappa}{2},\qquad \theta^\varrho>k$$

genügt. Ist nun $\theta>k$, so haben wir

$$\left|\frac{\varphi(t+\theta)-\varphi(t)}{\theta}-\frac{\varphi(t^\varrho+\theta^\varrho)-\varphi(t^\varrho)}{\theta^\varrho}\right|\leqq\frac{\varkappa}{2},$$

$$\left|\frac{\varphi(t^\varrho+\theta^\varrho)-\varphi(t^\varrho)}{\theta^\varrho}-\sigma\right|<\frac{\varkappa}{2}.$$

Also

$$\left|\frac{\varphi(t+\theta)-\varphi(t)}{\theta}-\sigma\right|<\varkappa.$$

Damit ist die Richtigkeit unserer Behauptung bewiesen. *Wir behaupten nun ferner, daß* $\psi(t)=\varphi(t)-\sigma\cdot t$ *im weiteren Sinne periodisch ist mit den Perioden* $b_1, b_2, \dots b_\mu$. Den Beweis für diese Behauptung geben wir in der nächsten Nummer.

17. Wir nehmen versuchsweise an, unsere Behauptung sei nicht richtig. Dann gibt es eine solche Konstante $\gamma>0$, daß folgendes gilt: Allein durch die Bedingung, daß $\frac{t_2-t_1}{b_i}$ $(i=1, 2, \dots \mu)$ sich von ganzen Zahlen genügend wenig unterscheiden, kann $|\psi(t_2)-\psi(t_1)|$ nicht $<\gamma$ gemacht werden. Man kann daher Werte t und $t+\tau$ $(\tau>0)$ derart angeben, daß $\frac{\tau}{b_i}$ $(i=1, 2, \dots \mu)$ sich von ganzen Zahlen beliebig wenig unterscheiden, während $|\psi(t+\tau)-\psi(t)|\overline{\geqq}\gamma$.

Wir wählen nun eine Größe δ der Bedingung $0<\delta<\frac{\pi}{2}$ gemäß, sonst beliebig. Unterscheiden sich dann $\frac{\tau}{b_i}$ $(i=1, 2, \dots \mu)$ von ganzen Zahlen um weniger als eine bestimmte positive Größe, so haben wir $\varphi(t+\tau)-\varphi(t)=n\cdot 2\pi+\varepsilon$, $|\varepsilon|<\delta$. n ist τ zugeordnet, ändert sich aber mit t nicht. (Man vgl. den Anfang der φ betreffenden Erörterungen in der vorigen Nummer.)

Nunmehr denken wir uns $t=t_0$, $\tau=\tau_0>0$ so gewählt, daß $|\psi(t_0+\tau_0)-\psi(t_0)|\overline{\geqq}\gamma$, $\varphi(t+\tau_0)-\varphi(t)=n\cdot 2\pi+\varepsilon$, $|\varepsilon|<\delta$. t ist hierbei beliebig, n fest. Wir haben

$$\psi(t_0+\tau_0)-\psi(t_0)=\varphi(t_0+\tau_0)-\varphi(t_0)-\sigma\tau_0=n\cdot 2\pi+\varepsilon_1-\sigma\tau_0,$$

$$\varphi(t_0+2\tau_0)-\varphi(t_0+\tau_0)-\sigma\tau_0=n\cdot 2\pi+\varepsilon_2-\sigma\tau_0,$$

$$\varphi(t_0+3\tau_0)-\varphi(t_0+2\tau_0)-\sigma\tau_0=n\cdot 2\pi+\varepsilon_3-\sigma\tau_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(t_0+\nu\tau_0)-\varphi(t_0+(\nu-1)\tau_0)-\sigma\tau_0=n\cdot 2\pi+\varepsilon_\nu-\sigma\tau_0,$$
$$|\psi(t_0+\tau_0)-\psi(t_0)|\overline{\overline{>}}\gamma,\quad |\varepsilon_1|<\delta,\ \ldots\ |\varepsilon_\nu|<\delta,$$
$$|n\cdot 2\pi-\sigma\tau_0+\varepsilon_1|\overline{\overline{>}}\gamma,\ |n\cdot 2\pi-\sigma\tau_0|+\delta>\gamma,\ |n\cdot 2\pi-\sigma\tau_0|>\gamma-\delta,$$
$$\frac{\varphi(t_0+\nu\cdot\tau_0)-\varphi(t_0)}{\nu\cdot\tau_0}-\sigma=\frac{n\cdot 2\pi-\sigma\tau_0}{\tau_0}+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_\nu}{\nu\cdot\tau_0},$$
$$\left|\frac{\varphi(t_0+\nu\tau_0)-\varphi(t_0)}{\nu\cdot\tau_0}-\sigma\right|>\frac{\gamma-\delta}{\tau_0}-\frac{\delta}{\tau_0}=\frac{\gamma-2\delta}{\tau_0}.$$

Dies gilt, wie man auch δ der Bedingung $0<\delta<\frac{\pi}{2}$ gemäß gewählt haben möge. Wir wählen $\delta<\frac{\gamma}{4}$; dann ist $2\delta<\frac{\gamma}{2}$, $\gamma-2\delta>\frac{\gamma}{2}$, $\frac{\gamma-2\delta}{\tau_0}>\frac{\gamma}{2\tau_0}$. Nach einem in der vorigen Nummer bewiesenen Satze können wir

$$\left|\frac{\varphi(t_0+\nu\tau_0)-\varphi(t_0)}{\nu\cdot\tau_0}-\sigma\right|<\frac{\gamma}{2\tau_0}$$

machen, wenn wir nur ν genügend groß wählen. Dies ergibt einen Widerspruch zu dem eben gefundenen Resultat. Somit müssen wir unsere versuchsweise gemachte Annahme (vgl. den Anfang von Nummer 17) fallen lassen. *Wir haben daher*

$\int_0^t R\,dt=\varphi(t)=\sigma\cdot t+$ im weiteren Sinne per. Funktion m. d. Per. $b_1,\ldots b_\mu$.

Nach Nummer 7 ist σ der konstante Teil von R und der zweite Summand der rechten Seite ist eine im weiteren Sinne periodische Funktion mit den Perioden $a_1, a_2, \ldots a_m$.

18. Die Voraussetzungen, unter welchen das Resultat der vorigen Nummer abgeleitet wurde, können durch allgemeinere ersetzt werden. *Es genügt nämlich die Annahme, daß die Gleichung* (22.) *zwei unabhängige Lösungen besitzt, von denen die eine ω im weiteren Sinne periodisch mit irgend welchen Perioden ist, während die andere für alle t zwischen endlichen Grenzen bleibt.*

Um diese Behauptung zu beweisen, bezeichnen wir mit $b_1, b_2, \ldots b_\mu$ ein Periodensystem von ω; dieses System wählen wir so, daß die $a_1, a_2, \ldots a_m$ unter den $b_1, b_2, \ldots b_\mu$ vorkommen. Eine solche Wahl ist natürlich möglich,

da man jedes Periodensystem durch beliebige von Null verschiedene Größen ergänzen kann. Nach der am Anfang dieser Nummer gemachten Voraussetzung können wir zwei unabhängige Lösungen von (22.) in der Form

$$u=\frac{1}{\sqrt{R}}\cos\int_0^t R\,dt, \qquad v=\frac{1}{\sqrt{R}}\sin\int_0^t R\,dt$$

schreiben, wobei bezüglich R dieselben Aussagen gelten wie am Anfang von Nummer 16. Wir haben

$$\omega=c_1u+c_2v=\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{\sqrt{R}}\Big[\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos\int_0^t R\,dt+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\int_0^t R\,dt\Big]$$

$$=\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{\sqrt{R}}\cos\Big(\int_0^t R\,dt+\alpha\Big).$$

Hierbei bezeichnen c_1, c_2, α gewisse Konstanten, von denen die beiden ersten nicht gleichzeitig verschwinden.

$\frac{d\omega}{dt}=\omega'$ liegt offenbar für alle t zwischen endlichen Grenzen; dasselbe gilt daher von $\int_0^t \frac{d^2\omega}{dt^2}\,dt=\int_0^t \omega''\,dt$. Nun zeigen aber unsere Voraussetzungen, daß ω'' im weiteren Sinne periodisch mit den Perioden $b_1, b_2, \ldots b_\mu$ ist. Wir schließen daher aus dem Gesagten, daß auch ω' eine im weiteren Sinne periodische Funktion mit den Perioden $b_1, b_2, \ldots b_\mu$ ist. Es gilt ferner

$$\omega'=-\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}\,R'}{2R\sqrt{R}}\cos\Big(\int_0^t R\,dt+\alpha\Big)-\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{\sqrt{R}}R\sin\Big(\int_0^t R\,dt+\alpha\Big)$$

$$=-\frac{R'}{2R}\omega-R\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{\sqrt{R}}\sin\Big(\int_0^t R\,dt+\alpha\Big),$$

$$\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{\sqrt{R}}\sin\Big(\int_0^t R\,dt+\alpha\Big)=\frac{\omega'+\frac{R'}{2R}\omega}{-R}=\text{i. w. S. per. Funkt. m. d. Per. } b_1,\ldots b_\mu.$$

Nun ist aber

$$\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{\sqrt{R}}\sin\Big(\int_0^t R\,dt+\alpha\Big)$$

eine von ω unabhängige Lösung der Gleichung (22.). Wir sind damit wiederum zu den Voraussetzungen von Nummer 16 gelangt; unsere Behauptung ist daher bewiesen.

19. Es möge die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\Phi(t).x=0 \tag{24.}$$

vorliegen, wobei $\Phi(t)$ eine für alle t definierte im weiteren Sinne periodische Funktion mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ bedeutet. Die Gleichung (24.) möge zwei unabhängige zwischen endlichen Grenzen bleibende Lösungen besitzen. Dann kann die allgemeine Lösung von (24.) nach Kapitel IV in der Form

$$x=\frac{k}{\sqrt{R}}\cos\int_c^t R\,dt \tag{25.}$$

dargestellt werden. Hierbei bezeichnen k und c Integrationskonstanten. R ist eine im weiteren Sinne periodische Funktion mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. Sie besitzt Ableitungen R' und R'', von denen das gleiche gilt. R ist für alle $t \gtrless$ als eine positive Konstante. Wir wissen aus Nummer 17, 18, daß (24.) dann und nur dann eine im weiteren Sinne periodische Lösung besitzt, wenn $\int_0^t R\,dt$ in der Form

$$\int_0^t R\,dt=\sigma.t+\text{ i. w. S. per. Funkt.} \tag{26.}$$

darstellbar ist; im letzteren Fall sind alle Lösungen im weiteren Sinne periodisch. Man könnte nun die Frage aufwerfen, ob nicht die zu Anfang unserer Nummer gemachten Voraussetzungen hinreichen, um die Darstellbarkeit von $\int_0^t R\,dt$ in der Form (26.) zu gewährleisten. Diese Frage ist, wie wir zeigen wollen, in verneinendem Sinne zu beantworten.

Zu diesem Zwecke wählen wir eine Funktion $\varphi(t)$ der in Nummer 8 angeführten Form und bestimmen hierauf eine Konstante e in der Weise, daß $e+\varphi(t)$ für alle t größer als eine gewisse positive Konstante wird. Der Ausdruck

$$\frac{c_1}{\sqrt{e+\varphi(t)}}\cos\int_{c_2}^t [e+\varphi(t)]\,dt$$

stellt dann das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x\left[\frac{3\varphi'\varphi'-2(e+\varphi)\varphi''-4(e+\varphi)^4}{4(e+\varphi)^2}\right] \tag{27.}$$

dar. Diese letztere Differentialgleichung ist von der Form (24.) und hat nur zwischen endlichen Grenzen bleibende Lösungen. Besäße nun Gleichung (27.) eine im weiteren Sinne periodische Lösung, so müßte $\int_0^t [e+\varphi(t)]\,dt$ in der Form

$$\int_0^t [e+\varphi(t)]\,dt = \sigma.t + \text{ i. w. S. per. Funktion}$$

darstellbar sein. σ wäre der konstante Teil von $e+\varphi(t)$, d. h. $=e$. Wir hätten also

$$\int_0^t \varphi(t)\,dt = \text{ i. w. S. per. Funktion.}$$

Dies widerspricht aber dem in Nummer 8 gefundenen Resultat. Also besitzt die Gleichung (27.) ungeachtet dessen, daß sie den am Anfang von Nummer 19 genannten Voraussetzungen genügt, keine im weiteren Sinne periodischen Lösungen. q. e. d.

VI. Die nichtreduzierte Differentialgleichung.

20. Die Behandlung der nichtreduzierten Differentialgleichung gründen wir auf ein allgemeines Theorem, zu dessen Darstellung wir nunmehr übergehen. Es möge das System linearer Differentialgleichungen

$$(28.)\qquad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \cdots + p_{1n}x_n + R_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{2n}x_n + R_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} = p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \cdots + p_{nn}x_n + R_n \end{cases}$$

vorliegen. Hierbei bedeuten die $p_{i\varkappa}$ und R_μ für alle t definierte im weiteren Sinne periodische Funktionen mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. Wir bilden nun die allgemeine Form eines „mit (28.) verwandten" Systems, d. h. eines Systems, welches aus (28.) erhalten wird, indem man die $p_{i\varkappa}(t)$, $R_\mu(t)$ durch $p_{i\varkappa}(t, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m)$, $R_\mu(t, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m)$ ersetzt; $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m$ ist dabei irgend ein Phasensystem. Man erhält

$$(29.)\qquad \frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t,\sigma)x_1 + p_{i2}(t,\sigma)x_2 + \cdots + p_{in}(t,\sigma)x_n + R_i(t,\sigma).$$
$$(i=1,2,\ldots n)$$

Außerdem schreiben wir das (29.) entsprechende reduzierte System an, d. h. das System

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t, \sigma)x_1 + p_{i2}(t, \sigma)x_2 + \cdots + p_{in}(t, \sigma)x_n. \tag{30.}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

Theorem. Es sei bekannt, daß wenigstens für ein bestimmtes spezielles Phasensystem die Gleichungen (29.) *eine Lösung besitzen, deren absoluter Betrag nicht beliebig große Werte annimmt.**) *Andererseits sollen die Differentialgleichungen* (30.), *wie man das Phasensystem auch gewählt haben möge, niemals eine Lösung besitzen, deren absoluter Betrag wohl beliebig kleine, nicht aber beliebig große Werte annimmt.***) *Dann besitzen die Differentialgleichungen* (29.) *bei allen Phasensystemen mindestens eine Lösung, deren Elemente im weiteren Sinne periodische Funktionen mit den Perioden* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ *sind.*

Ehe wir uns mit dem Beweise dieses Satzes beschäftigen, wollen wir einige Worte über die gemachten Voraussetzungen sagen. Die letzteren zerfallen in zwei Teile, wobei in der obigen Formulierung der zweite Teil mit den Worten „Andererseits sollen die Differentialgleichungen (30.) usw." beginnt. Man könnte die Frage aufwerfen, ob überhaupt unter Umständen dieser zweite Teil der Voraussetzungen nicht erfüllt sein kann. Dieser Fall kann, wie wir zeigen werden, bereits bei der Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = p_{11}x \tag{31.}$$

eintreten. Es sei nämlich p_{11} eine für alle t definierte im weiteren Sinne mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ periodische Funktion. Der konstante Teil von p_{11} sei gleich Null und p_{11} besitze kein zwischen endlichen Grenzen bleibendes Integral. Die Existenz von Funktionen mit diesen Eigenschaften haben wir in Nummer 8 bewiesen. Ferner ist uns aus Nummer 9 bekannt, daß man ein solches Phasensystem $s_1, s_2, \ldots s_m$ finden kann, daß

$$\int_0^t p_{11}(t, s)\,dt \lessgtr 0 \tag{32.}$$

gilt.

---

*) Mit dem Namen „absoluter Betrag der Lösung mit den Elementen $x_1, x_2, \ldots x_n$" bezeichnen wir die Funktion $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. Nimmt der absolute Betrag unter anderem Werte an, die größer (kleiner) sind als eine beliebig gewählte positive Zahl, so sagen wir, er nehme beliebig große (kleine) Werte an.

**) Von der Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ sehen wir dabei natürlich ab.

$$x = e^{\int_0^t p_{11}(t,s)\,dt} \leqq 1$$

ist eine Lösung von

$$\frac{dx}{dt} = p_{11}(t,s)\,x.$$

Der absolute Betrag der betrachteten Lösung, d. h. x, nimmt offenbar beliebig kleine Werte an, da das Integral (32.) nicht zwischen endlichen Grenzen bleibt. (Man vergleiche den Schluß von Nummer 7.) Damit ist die Richtigkeit unserer Bemerkung bewiesen.

Ungeachtet des eben gesagten kann man die weitere Frage aufwerfen, ob der zweite Teil der Voraussetzungen nicht fortfallen kann. Diese Frage muß ich vorläufig unentschieden lassen. Nach dieser Abschweifung gehen wir nunmehr zum Beweise unseres Theorems über. Diesem Zweck ist der Rest dieses Kapitels gewidmet.

21. Es möge, der Voraussetzung entsprechend, eine solche Lösung $x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)$ der für das spezielle Phasensystem $\sigma_1', \sigma_2', \ldots \sigma_m'$ gebildeten Gleichungen (29.) vorliegen, daß ihr absoluter Betrag $\leqq k$ bleibt. $\sigma_1'', \sigma_2'', \ldots \sigma_m''$ sei irgend ein zweites Phasensystem. Es gibt solche t-Werte, daß $\frac{t}{\alpha_1} + \sigma_1' - \sigma_1'', \ldots \frac{t}{\alpha_m} + \sigma_m' - \sigma_m''$ sich von ganzen Zahlen beliebig wenig unterscheiden. Es gibt auch solche t-Werte, daß die genannten Größen sich von ganzen Zahlen beliebig wenig unterscheiden, während $x_1(t), \ldots x_n(t)$ von festen, der Bedingung $\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \leqq k$ genügenden Größen $a_1, a_2, \ldots a_n$ beliebig wenig abweichen. Dies folgt leicht mit Berücksichtigung des Umstandes, daß für alle t $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leqq k$ gilt. Wir bemerken ferner, daß $x_1(t+\tau), \ldots x_n(t+\tau)$ den Gleichungen (29.) genügen, wenn als Phasen Größen genommen werden, die sich von $\frac{\tau}{\alpha_1} + \sigma_1', \ldots \frac{\tau}{\alpha_m} + \sigma_m'$ um ganze Zahlen unterscheiden. Man kann nun nach dem gesagten τ so wählen, daß

1. $\frac{\tau}{\alpha_1} + \sigma_1', \ldots \frac{\tau}{\alpha_m} + \sigma_m'$ sich von $\sigma_1'', \ldots \sigma_m''$, abgesehen von ganzen Zahlen, beliebig wenig unterscheiden,

2. $x_1(\tau), \ldots x_n(\tau)$ den Zahlen $a_1, \ldots a_n$ beliebig nahe liegen.

Man kann also τ so wählen, daß

1. $x_1(t+\tau), \ldots x_n(t+\tau)$ den Gleichungen (29.) genügen, wenn als Phasen Größen genommen werden, die sich von $\sigma_1'', \ldots \sigma_m''$ beliebig wenig unterscheiden.

2. $x_1(\tau), \ldots x_n(\tau)$ den Zahlen $a_1, \ldots a_n$ beliebig nahe liegen.

Wir fassen nun diejenige Lösung $\xi_1, \dots \xi_n$ der für die Phasen $\sigma_1'', \dots \sigma_m''$ gebildeten Gleichungen (29.) ins Auge, deren Elemente für $t=0$ die Werte $a_1, \dots a_n$ annehmen. Wir behaupten, daß für alle t $\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2} \leqq k$ gilt. Zum Beweise nehmen wir versuchsweise an, es sei $\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2} > k$ für $t=T$. Liegt dann eine Lösung $\eta_1, \dots \eta_n$ der Gleichungen (29.) bei ev. von $\sigma_1'', \dots \sigma_m''$ verschiedenen Phasen vor, so wird für $t=T$ auch $\sqrt{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2} > k$ gelten, wenn nur die neuen Phasen genügend nahe $\sigma_1'', \dots \sigma_m''$ liegen und $\eta_1(0), \dots \eta_n(0)$ sich genügend wenig von $a_1, \dots a_n$ unterscheiden. Nun kann man aber nach dem obigen τ so wählen, daß $x_1(t+\tau), \dots x_n(t+\tau)$ eine Lösung der Gleichungen (29.) darstellen, wobei die Phasen $\sigma_1'', \dots \sigma_m''$ beliebig nahe liegen und $x_1(\tau), x_2(\tau), \dots x_n(\tau)$ den Zahlen $a_1, a_2, \dots a_n$ beliebig nahe kommen. Somit wäre es möglich, τ so zu wählen, daß

$$\sqrt{[x_1(T+\tau)]^2 + \dots + [x_n(T+\tau)]^2} > k,$$

was dem obigen widerspricht. Somit gilt immer

$$\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2} \leqq k.$$

Wir haben also gezeigt: Besitzen die Gleichungen (29.) für *ein* System der Phasen eine Lösung, deren absoluter Betrag $\leqq k$ bleibt, so gilt dasselbe für die Gleichungen (29.) bei *allen* Phasensystemen.

22. Für ein gewisses Phasensystem mögen die Gleichungen (29.) eine Lösung besitzen, deren absoluter Betrag für alle t $\leqq k$ ist. Das genannte Phasensystem legen wir zunächst unseren Betrachtungen zugrunde. Die Zahlen h, für welche Lösungen existieren, deren absoluter Betrag $\leqq h$ bleibt, haben eine untere Grenze $g \leqq k$. Man kann zeigen, daß g selbst zu den Zahlen h gehört. Zum Beweise nehmen wir versuchsweise das Gegenteil an. Dann gibt es in beliebiger Nähe von g Zahlen h, welche der Bedingung $g < h < k$ genügen. Es ist, wie leicht zu sehen, möglich, Lösungen anzugeben, deren Elemente für $t=0$ gewissen festen Zahlen $a_1, a_2, \dots a_n$ beliebig nahe kommen und deren absoluter Betrag für alle t $\leqq h$ ist, während h sich von g beliebig wenig unterscheidet. Wir fassen nun eine Lösung ω ins Auge, deren Elemente für $t=0$ gleich $a_1, a_2, \dots a_n$ sind. Der absolute Betrag dieser Lösung muß für alle t gleich oder kleiner als g sein. Wäre nämlich für $t=T$ der absolute Betrag von ω gleich $g+p$, $p>0$, so könnte man nach dem obigen Lösungen finden, die sich der Lösung ω im Intervall von

0 bis T beliebig nahe anschmiegen und deren absoluter Betrag für alle t $\leqq g+\frac{p}{2}$ bleibt. Dies ergibt aber einen Widerspruch. Somit bleibt der absolute Betrag von ω für alle t gleich oder kleiner als g, und es gehört daher g selbst zu den Größen h. Damit ist der geforderte Beweis geliefert. Wir wählen nun ein anderes Phasensystem. Nach Nummer 21 gibt es auch dann eine Lösung, deren absoluter Betrag $<g$ bleibt. Es gibt aber keine Lösung, deren absoluter Betrag $\leqq\gamma<g$ bleibt. Andernfalls würde nämlich aus Nummer 21 folgen, daß auch im Falle des ersten Phasensystems eine solche Lösung existiert, was nicht der Fall ist. Wir haben somit bewiesen: *Es gibt eine solche Zahl g, daß jedes der mit einander verwandten Systeme* (29.) *eine Lösung besitzt, deren absoluter Betrag für alle t gleich oder kleiner als g bleibt, während keines der mit einander verwandten Systeme* (29.) *eine Lösung besitzt, deren absoluter Betrag für alle t gleich oder kleiner als* $\gamma<g$ *bleibt.*

23. Wir werden nun zeigen, daß jedes der Systeme (29.) nur *eine* Lösung besitzt, deren absoluter Betrag $\leqq g$ bleibt. Zu diesem Zweck wählen wir ein Phasensystem $\sigma_1^0, \sigma_2^0, \ldots \sigma_m^0$ fest aus und nehmen versuchsweise an, das diesen Phasen entsprechende System (29.) besitze zwei verschiedene Lösungen, für welche der absolute Betrag $\leqq g$ bleibt. Die Elemente dieser Lösungen seien $x_1', x_2', \ldots x_n'$ und $x_1'', x_2'', \ldots x_n''$. Auch $\frac{x_1'+x_1''}{2}, \ldots \frac{x_n'+x_n''}{2}$ sind dann die Elemente einer Lösung; ferner sind $x_1'-x_1'', \ldots x_n'-x_n''$ die Elemente einer nicht trivialen Lösung des entsprechenden reduzierten Systems. $\sqrt{(x_1'-x_1'')^2+\cdots+(x_n'-x_n'')^2}$ nimmt, wie aus der Voraussetzung folgt, nicht beliebig kleine Werte an; es kann daher eine positive Zahl c so angegeben werden, daß für alle t

$$\sqrt{(x_1'-x_1'')^2+\cdots+(x_n'-x_n'')^2}>c$$

gilt. Wir haben

$$\left(\frac{x_1'+x_1''}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_n'+x_n''}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1'-x_1''}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_n'-x_n''}{2}\right)^2$$

$$=\frac{x_1'^2+\cdots+x_n'^2+x_1''^2+\cdots+x_n''^2}{2}\leqq g^2.$$

Also

$$\left(\frac{x_1'+x_1''}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_n'+x_n''}{2}\right)^2<g^2-\frac{c^2}{4}.$$

Der absolute Betrag der Lösung $\frac{x_1' + x_1''}{2}, \dots \frac{x_n' + x_n''}{2}$ ist demgemäß stets kleiner als $\sqrt{g^2 - \frac{c^2}{4}} < g$. Dies widerspricht aber dem in der vorigen Nummer gewonnenen Resultat. Somit ist unsere versuchsweise eingeführte Annahme abzuweisen und unsere zu Anfang von Nummer 23 ausgesprochene Behauptung richtig.

24. Die dem Phasensystem $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m$ entsprechende im vorhergehenden charakterisierte Lösung*) möge mit $\omega_i(t, \sigma_1, \dots \sigma_m)$ $(i = 1, 2, \dots n)$ bezeichnet werden. Wir behaupten, *daß alle Elemente derselben im weiteren Sinne periodische Funktionen mit den Perioden* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ *sind.* Um dies für $\omega_a(t, \sigma_1', \dots \sigma_m')$ zu beweisen,**) nehmen wir versuchsweise an, die Behauptung sei für $\omega_a(t, \sigma_1', \dots \sigma_m')$ nicht richtig. Dann kann man eine positive Zahl p und t-Werte t' und t'' so angeben, daß $\frac{t''-t'}{\alpha_1}, \dots \frac{t''-t'}{\alpha_m}$ sich von ganzen Zahlen beliebig wenig unterscheiden, während $|\omega_a(t', \sigma') - \omega_a(t'', \sigma')| \geqq p$ gilt. Bedenkt man, daß der absolute Betrag der Lösungen $\omega_i(t, \sigma_1, \dots \sigma_m)$ $(i = 1, 2, \dots n)$ stets $\leqq g$ bleibt, so erkennt man: Es gibt solche t-Werte t' und t'', daß $\frac{t'-t''}{\alpha_1}, \dots \frac{t'-t''}{\alpha_m}$ sich von ganzen Zahlen beliebig wenig unterscheiden, während $\omega_1(t', \sigma'), \dots \omega_n(t', \sigma')$ gewissen festen Werten $k_1', k_2', \dots k_n'$, $\omega_1(t'', \sigma'), \dots \omega_n(t'', \sigma')$ gewissen festen Werten $k_1'', k_2'', \dots k_n''$ beliebig nahe liegen. Dabei gilt

$$\sqrt{k_1'^2 + \dots + k_n'^2} \leqq g, \qquad \sqrt{k_1''^2 + \dots + k_n''^2} \leqq g, \qquad |k_a' - k_a''| \geqq p.$$

Man kann auch, wie leicht zu sehen, t' und t'' so wählen, daß nicht nur die eben genannten Bedingungen erfüllt sind, sondern auch die weiteren, daß gewisse, den Größen $\frac{t'}{\alpha_1} + \sigma_1', \dots \frac{t'}{\alpha_m} + \sigma_m'$ kongruente Zahlen, sowie auch gewisse, den Größen $\frac{t''}{\alpha_1} + \sigma_1', \dots \frac{t''}{\alpha_m} + \sigma_m'$ kongruente Zahlen bestimmten Größen $s_1, s_2, \dots s_m$ beliebig nahe kommen.

Wir wollen nun diejenige den Phasen $s_1, \dots s_m$ entsprechende Lösung λ ins Auge fassen, deren Elemente für $t = 0$ die Werte $k_1', k_2', \dots k_n'$ haben. $\omega_1(t + \tau, \sigma'), \dots \omega_n(t + \tau, \sigma')$ sind die Elemente einer Lösung, welche den Phasen $\frac{\tau}{\alpha_1} + \sigma_1', \dots \frac{\tau}{\alpha_m} + \sigma_m'$ entspricht. Die Werte dieser Elemente für $t = 0$

---

*) Es ist hier und im folgenden stets von Lösungen der Gleichungen (29.) die Rede.

**) a ist irgend einer der Indices $1, 2, \dots n$; $\sigma_1', \sigma_2', \dots \sigma_m'$ ist irgend ein spezielles Phasensystem.

sind $\omega_1(\tau, \sigma'), \ldots \omega_n(\tau, \sigma')$. Aus dem in dieser Nummer gesagten folgt, daß man τ so wählen kann, daß $\omega_1(\tau, \sigma'), \ldots \omega_n(\tau, \sigma')$ $k_1', k_2', \ldots k_n'$ beliebig nahe kommen und daß gewisse $\frac{\tau}{\alpha_1} + \sigma_1', \ldots \frac{\tau}{\alpha_m} + \sigma_m'$ kongruente Zahlen den Größen $s_1, s_2, \ldots s_m$ beliebig nahe liegen. Es ist daher für ein beliebig großes, $t=0$ umfassendes t-Intervall möglich, der Lösung λ eine solche andere (ev. anderen Phasen entsprechende) Lösung beliebig genau anzuschmiegen, daß der absolute Betrag der letzteren stets $\leqq g$ bleibt. Hieraus folgt, daß der absolute Betrag der Lösung λ stets $\leqq g$ ist. Die Elemente der Lösung λ sind daher

$$\omega_1(t, s_1, \ldots s_m), \ldots \omega_n(t, s_1, \ldots s_m).$$

Wir fassen nun zweitens diejenige, den Phasen $s_1, s_2, \ldots s_m$ entsprechende Lösung μ ins Auge, deren Elemente für $t=0$ die Werte $k_1'', k_2'', \ldots k_n''$ haben. Wir beweisen genau wie für die Lösung λ, daß die Elemente von μ nichts anderes sind als

$$\omega_1(t, s_1, \ldots s_m), \ldots \omega_n(t, s_1, \ldots s_m),$$

so daß λ und μ zusammenfallen. Dies ist aber unmöglich, da $|k_a' - k_a''| \geqq p$. Somit ergibt sich ein Widerspruch; wir müssen daher unsere versuchsweise gemachte Annahme fallen lassen. Unser Satz ist damit bewiesen.

VII. Die nichtreduzierte Differentialgleichung (Schluß).

25. Wir ergänzen das im letzten Kapitel gesagte durch folgenden Satz: *Es sei bekannt, daß die Gleichungen* (29.) *aus Nummer 20 für ein bestimmtes Phasensystem* $\sigma_1', \sigma_2', \ldots \sigma_m'$ *eine Lösung besitzen, deren Elemente* $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots x_n(t)$ *im weiteren Sinne periodische Funktionen mit den Perioden* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ *sind.*

$$x_1(t, \sigma_1'' - \sigma_1', \ldots \sigma_m'' - \sigma_m'), \ldots x_n(t, \sigma_1'' - \sigma_1', \ldots \sigma_m'' - \sigma_m')$$

(wobei $\sigma_1'', \sigma_2'', \ldots \sigma_m''$ *irgend ein Phasensystem darstellen) sind dann die Elemente einer Lösung der für die Phasen* $\sigma_1'', \sigma_2'', \ldots \sigma_m''$ *gebildeten Gleichungen* (29.).

Um diesen Satz zu beweisen, bilden wir die Gleichungen (29.) für $\sigma_1 = \sigma_1'', \ldots \sigma_m = \sigma_m''$ und bezeichnen mit $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ die Elemente derjenigen Lösung, welche durch die Bedingungen

$$\omega_1(0) = x_1(0, \sigma_1'' - \sigma_1', \ldots \sigma_m'' - \sigma_m'), \ldots \omega_n(0) = x_n(0, \sigma_1'' - \sigma_1', \ldots \sigma_m'' - \sigma_m')$$

bestimmt ist. Mit $\omega_1(t), \dots \omega_n(t)$ vergleichen wir $x_1(t+\tau), \dots x_n(t+\tau)$, wobei τ eine Konstante bezeichnet. Die letzteren Größen sind die Elemente einer Lösung von (29.) für $\sigma_1 = \sigma_1' + \frac{\tau}{\alpha_1}, \dots \sigma_m = \sigma_m' + \frac{\tau}{\alpha_m}$. Wir haben

$$x_1(t+\tau) = x_1\Big(t, \frac{\tau}{\alpha_1}, \dots \frac{\tau}{\alpha_m}\Big), \dots x_n(t+\tau) = x_n\Big(t, \frac{\tau}{\alpha_1}, \dots \frac{\tau}{\alpha_m}\Big),$$

$$x_1(\tau) = x_1\Big(0, \frac{\tau}{\alpha_1}, \dots \frac{\tau}{\alpha_m}\Big), \dots x_n(\tau) = x_n\Big(0, \frac{\tau}{\alpha_1}, \dots \frac{\tau}{\alpha_m}\Big).$$

Nun kann man τ so wählen, daß die unter einander stehenden Zahlen der Reihen

$$\begin{array}{llll} \frac{\tau}{\alpha_1}, & \frac{\tau}{\alpha_2}, & \dots \quad \frac{\tau}{\alpha_m}, & \sigma_1' + \frac{\tau}{\alpha_1},\ \sigma_2' + \frac{\tau}{\alpha_2}, \dots \sigma_m' + \frac{\tau}{\alpha_m} \\ \sigma_1'' - \sigma_1',\ \sigma_2'' - \sigma_2', \dots \sigma_m'' - \sigma_m', & & & \sigma_1'', \quad \sigma_2'', \quad \dots \quad \sigma_m'' \end{array}$$

sich, abgesehen von ganzen Zahlen, beliebig wenig unterscheiden. Man kann demnach τ so wählen, daß in einem willkürlich aber fest gewählten endlichen t-Intervall die $x_1(t+\tau), \dots x_n(t+\tau)$ sich erstens den $\omega_1(t), \dots \omega_n(t)$ und zweitens den $x_1(t, \sigma_1'' - \sigma_1', \dots \sigma_m'' - \sigma_m'), \dots x_n(t, \sigma_1'' - \sigma_1', \dots \sigma_m'' - \sigma_m')$ beliebig nahe anschließen. Hieraus folgt

$$\omega_1(t) = x_1(t, \sigma_1'' - \sigma_1', \dots \sigma_m'' - \sigma_m'), \dots \omega_n(t) = x_n(t, \sigma_1'' - \sigma_1', \dots \sigma_m'' - \sigma_m').$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

Es mag an dieser Stelle noch folgende Bemerkung eingeschaltet werden. Wir haben in der Nummer 7 des III. Kapitels bereits erwähnt, daß durch andere Anordnung unserer Untersuchungen der in der genannten Nummer bewiesene Satz unmittelbar als richtig erkannt werden kann. In der Tat ist derselbe offenbar ein Spezialfall des im Kapitel VI bewiesenen Satzes.

26. Wir gehen nun zum Beweise eines weiteren Satzes über.

Es mögen die Differentialgleichungen

$$(33.) \qquad \frac{dx_i}{dt} = q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \dots + q_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

vorliegen. Hierbei bedeuten die q_{ix} für alle t definierte im weiteren Sinne periodische Funktionen mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$. Es sei bekannt, daß diese Differentialgleichungen nur Lösungen mit begrenztem absoluten Betrag besitzen. Ferner möge

$$\int_0^t (q_{11} + q_{22} + \cdots + q_{nn})\, dt$$

für alle t zwischen endlichen Grenzen liegen. Dann besitzt keines der mit (33.) *verwandten Systeme*

$$\frac{dx_i}{dt} = q_{i1}(t, \sigma)\, x_1 + q_{i2}(t, \sigma)\, x_2 + \cdots + q_{in}(t, \sigma)\, x_n \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{34.}$$

eine (nicht triviale) Lösung, deren absoluter Betrag beliebig kleine Werte annimmt.

Wir beweisen zunächst, daß auch die Gleichungen (34.) nur Lösungen mit begrenztem absoluten Betrag besitzen. Es mögen

$$\begin{array}{l} u_{11}(t),\ u_{12}(t), \ldots u_{1n}(t), \\ u_{21}(t),\ u_{22}(t), \ldots u_{2n}(t), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_{n1}(t),\ u_{n2}(t), \ldots u_{nn}(t) \end{array}$$

unabhängige Lösungen der Gleichungen (33.) sein und $\sigma_1', \sigma_2', \ldots \sigma_m'$ ein spezielles Phasensystem bezeichnen. Man kann die Konstante τ so wählen, daß erstens

$$\begin{array}{l} u_{11}(t+\tau),\ u_{12}(t+\tau), \ldots u_{1n}(t+\tau), \\ u_{21}(t+\tau),\ u_{22}(t+\tau), \ldots u_{2n}(t+\tau), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_{n1}(t+\tau),\ u_{n2}(t+\tau), \ldots u_{nn}(t+\tau) \end{array}$$

Lösungen der Gleichungen (34.) für $\sigma_1', \sigma_2', \ldots \sigma_m'$ beliebig nahe liegende Phasen sind, und daß zweitens

$$\begin{array}{l} u_{11}(\tau),\ u_{12}(\tau), \ldots u_{1n}(\tau), \\ u_{21}(\tau),\ u_{22}(\tau), \ldots u_{2n}(\tau), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_{n1}(\tau),\ u_{n2}(\tau), \ldots u_{nn}(\tau) \end{array}$$

den festen Zahlen

$$\begin{array}{l} a_{11},\ a_{12}, \ldots a_{1n}, \\ a_{21},\ a_{22}, \ldots a_{2n}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1},\ a_{n2}, \ldots a_{nn} \end{array}$$

beliebig nahe liegen. Dies erkennt man mit Berücksichtigung des Umstandes, daß die Gleichungen (33.) nur Lösungen mit begrenztem absoluten Betrag besitzen. Wir nehmen $a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in}$ $(i = 1, 2, \dots n)$ als Anfangswerte von n Lösungen für $t = 0$ der für die Phasen $\sigma_1', \sigma_2', \dots \sigma_m'$ gebildeten Gleichungen (34.). Aus dem unmittelbar vorher gesagten folgt, daß alle diese Lösungen beschränkte absolute Beträge haben. Ferner wollen wir zeigen, daß die gefundenen n Lösungen von einander unabhängig sind. Zu diesem Zweck bemerken wir, daß

$$(35.) \qquad \begin{vmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \dots u_{1n}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \dots u_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_{n1}(t) & u_{n2}(t) \dots u_{nn}(t) \end{vmatrix} = e^{\int_0^t (q_{11} + q_{22} + \dots + q_{nn})\, dt} \cdot c$$

gilt, wobei die Konstante c nicht verschwindet. Wie aus dem vorhergehenden ersichtlich, kann t sich in der Weise ändern, daß die links stehende Determinante nach

$$(36.) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

strebt. Die rechte Seite von (35.) ist gemäß der Voraussetzung absolut stets größer als eine positive Konstante. Also ist die Determinante (36.) von Null verschieden. Damit ist der Beweis der Unabhängigkeit erbracht und wir sind jetzt in der Tat zu der Behauptung berechtigt, daß auch die Gleichungen (34.) nur Lösungen mit begrenztem absoluten Betrag besitzen.

Um nun unseren Satz zu beweisen, nehmen wir versuchsweise an, daß die Gleichungen (34.) bei gewissen Phasen $s_1, s_2, \dots s_m$ eine nicht triviale Lösung $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ besitzen, deren absoluter Betrag beliebig kleine Werte annimmt. Wir wählen außerdem $n-1$ Lösungen $u_1, u_2, \dots u_n$, $v_1, v_2, \dots v_n$, $\dots w_1, w_2, \dots w_n$ von der Beschaffenheit, daß

$$\begin{array}{l} \xi_1, \ \xi_2, \dots \ \xi_n, \\ u_1, \ u_2, \dots \ u_n, \\ v_1, \ v_2, \dots \ v_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ w_1, \ w_2, \dots \ w_n \end{array}$$

von einander unabhängig sind. Dann haben wir

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \dots & \xi_n \\ u_1 & u_2 \dots & u_n \\ v_1 & v_2 \dots & v_n \\ \dots & \dots & \dots \\ w_1 & w_2 \dots & w_n \end{vmatrix} = e^{\int_0^t [q_{11}(t,s)+\cdots+q_{nn}(t,s)]\,dt} \cdot c,$$

wobei c eine von Null verschiedene Konstante bedeutet. Nach dem, was wir in Nummer 7 des III. Kapitels über die Integrale im weiteren Sinne periodischer Funktionen gesagt haben, ist klar, daß

$$\int_0^t [q_{11}(t,s)+\cdots+q_{nn}(t,s)]\,dt$$

für alle t zwischen endlichen Grenzen bleibt. Somit ist der absolute Wert der links stehenden Determinante immer größer als eine gewisse positive Zahl. Der absolute Betrag aller Lösungen $u_1, u_2, \dots u_n,\ v_1, v_2, \dots v_n, \dots w_1, w_2, \dots w_n$ ist, wie wir wissen, begrenzt. Würde also der absolute Betrag der Lösung $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ beliebig kleine Werte annehmen, so würde auch der Absolutwert der links stehenden Determinante beliebig kleine Werte annehmen. Dies ist, wie eben gezeigt wurde, unmöglich. Wir müssen daher unsere versuchsweise gemachte Annahme fallen lassen. Unser Satz ist daher bewiesen.

27. Wir sind jetzt in der Lage, den noch nicht bewiesenen Rest der in den Nummern 1 und 2 aufgestellten Behauptungen zu erledigen. Es möge die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x \cdot f(t) = \varphi(t) \tag{37.}$$

vorliegen, wobei $f(t)$ und $\varphi(t)$ für alle t definierte im weiteren Sinne mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ periodische Funktionen bedeuten. *Wir machen die Voraussetzung, daß alle Lösungen der gegebenen Gleichung zwischen endlichen Grenzen liegen.* Dann liegt auch $\frac{dx}{dt}$ für jede Lösung zwischen endlichen Grenzen. Ferner folgt aus der genannten Voraussetzung, daß auch für alle Lösungen der reduzierten Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x \cdot f(t) = 0 \tag{38.}$$

x und $\frac{dx}{dt}$ zwischen endlichen Grenzen liegen. Wir bilden nun die Systeme

$$(39.)\qquad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 0 \,.\, y + z + 0, \\ \frac{dz}{dt} = -f(t) \,.\, y + 0 \,.\, z + \varphi(t), \end{cases}$$

sowie

$$(40.)\qquad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 0 \,.\, y + z, \\ \frac{dz}{dt} = -f(t) \,.\, y + 0 \,.\, z \end{cases}$$

und

$$(41.)\qquad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 0 \,.\, y + z, \\ \frac{dz}{dt} = -f(t, \sigma) y + 0 \,.\, z. \end{cases}$$

Es sei $x = \omega$ eine Lösung von (37.). Dann stellt $y = \omega$, $z = \frac{d\omega}{dt}$ eine Lösung von (39.) dar, deren Elemente zwischen endlichen Grenzen bleiben. Liegt andererseits eine Lösung von (40.) vor, so ist $x = y$ eine Lösung von (38.); es liegen daher y und $\frac{dy}{dt}$, d. h. y und z zwischen endlichen Grenzen. Nunmehr verwenden wir zunächst den in der vorigen Nummer bewiesenen Satz. Setzen wir $q_{11} = 0$, $q_{12} = 1$, $q_{21} = -f(t)$, $q_{22} = 0$, so sind die Bedingungen des genannten Satzes erfüllt; wir schließen demnach, daß das System (41.) für kein Phasensystem eine (nicht triviale) Lösung besitzt, deren absoluter Betrag beliebig kleine Werte annimmt.

Weiter gelangt der in Nummer 20 formulierte Satz zur Anwendung. Die Rolle des Systems (28.) spielt dabei jetzt das System (39.). Der genannte Satz lehrt, daß die Gleichungen (39.) eine Lösung besitzen, deren Elemente y, z im weiteren Sinne periodische Funktionen mit den Perioden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ sind. Dann genügt $x = y$ der Gleichung (37.). *Die Gleichung* (37.) *besitzt daher eine Lösung, für welche* $x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$ *im weiteren Sinne periodische Funktionen mit den Perioden* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ *sind.*

Damit haben wir sämtliche in den Nummern 1 und 2 aufgestellten Behauptungen erledigt.

28. Es mag schließlich noch folgende Bemerkung Platz finden. *Bedeuten in den Gleichungen*

$$(42.) \qquad \frac{dx_i}{dt} = r_{i1}x_1 + r_{i2}x_2 + \cdots + r_{in}x_n \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

die r_{ik} für alle t definierte im engeren Sinne periodische stetige Funktionen mit derselben Periode, so können diese Gleichungen keine (nicht triviale) Lösung besitzen, deren absoluter Betrag nicht beliebig große, wohl aber beliebig kleine Werte annimmt.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu beweisen, nehmen wir versuchsweise an, die Gleichungen (42.) hätten eine (nicht triviale) Lösung $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \ldots x_n = \xi_n$, für welche $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2}$ nicht beliebig große, wohl aber beliebig kleine Werte annimmt. Auf Grund der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit im engeren Sinne periodischen Koeffizienten erkennen wir dann, daß $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ im weiteren Sinne periodische Funktionen sind. Weiter schließen wir aus der versuchsweise eingeführten Annahme, daß man beliebig große t-Intervalle angeben kann, in welchen $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2}$ beliebig kleine Werte annimmt. Man kann daher auch beliebig große t-Intervalle angeben, in welchen die Schwankung der Funktionen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ beliebig klein ist. Da die $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ im weiteren Sinne periodische Funktionen sind, so folgt aus dem gesagten auf Grund eines von uns in Nummer 5 (gegen Ende) bewiesenen Satzes, daß die $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ sämtlich gleich 0 sind. Dies ist aber unmöglich, da $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \ldots x_n = \xi_n$ eine nicht triviale Lösung darstellt.

Journal

für die

reine und angewandte Mathemati

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 131.

Heft IV.

Ausgegeben den 13. September.

Berlin,

W. 35. Lützowstraße 107/8.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1906.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Band 131. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

oblauch, J., Die Biegungs-Invarianten und Kovarianten von gegebener Ordnung . . . . . Seite 247

uer, M., Über die arithmetische Reihe . . . . . — 265

hl, P., Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie . . . . . — 268

ndungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg a. d. L., Universitätsstraße 54.

GEORG REIMER VERLAGSBUCHHANDLUNG **BERLIN W. 35** LÜTZOWSTRASSE 107-8.

Soeben erschien die für den europäischen Kontinent bestimmte deutsche Ausgabe von

Carl Schurz' Lebenserinnerungen

Bis zum Jahre 1852

Oktav 420 Seiten. Mit einer Gravure: Schurz und Kinkel.

Preis geheftet Mark 7.—, in Ganzleinenband gebunden Mark 8.—.

Etliche Jahre vor seinem Heimgange hat Schurz begonnen, die Odyssee seines Lebens zu schreiben, und er hat diese Aufgabe am Schlusse seiner Tage beinahe vollendet.

Der erste vorliegende Band, in seiner ersten Fassung deutsch niedergeschrieben und von Schurz selbst wenige Tage vor seinem Tode zum Druck gegeben, umfaßt die Geschichte und Entwicklung des Dorfschullehrerkindes aus Liblar, das in den Strudel des politischen Sturmes und Dranges der Märzjahre gerät und, als es daraus hervortaucht, ohne Heimat war. Er schildert uns die Freuden und Entsagungen eines geistig äußerst regsamen Knaben, der sich aus ökonomischer Enge zu Bildung und geistiger Freiheit hindurchringt, um sich dann als Student kopfüber in die Bewegung des Jahres 1848 zu werfen. Er erzählt uns, wie ihm sein Lehrer Kinkel zum Freund und Kampfgenossen wurde, vom mißglückten Siegburger Zeughaussturme. Wie er in der Festung Rastatt eingeschlossen war und sich in abenteuerlicher Flucht durch einen Abzugskanal aus ihr befreite, wie er dann, selbst von Häschern gesucht, den phantastischen Plan faßte und ausführte, Kinkel aus dem Spandauer Zuchthause zu befreien.

Durch diese Tat als Dreiundzwanzigjähriger zum Helden einer europäischen Legende geworden, die für den minder Gefestigten zum inneren Schiffbruch geworden wäre, beschloß Carl Schurz, sein Glück in Amerika zu versuchen, und hatte soviel Vertrauen in seinen Stern, daß er auch gleich ein junges Weib mit sich hinübernahm. Hier schließt der erste Band, dem ein zweiter, im Manuskript vollendeter, bald folgen soll.

Moritz Lazarus' Lebenserinnerungen

Bearbeitet von

Nahida Lazarus und **Alfred Leicht.**

Ein stattlicher Oktavband von 640 Seiten und mit einem Titelbild.

Preis geheftet Mark 12.—, in Halbfranz gebunden Mark 14.—.

Lebenserinnerungen, nicht eine eigentliche am Faden der Zeit und der Persönlichkeit aufgereihte Darstellung des eigenen Lebens. Ein Buch biographischer Rhapsodien, geschöpft aus der erlebten und erlittenen Stofffülle eines an Freundschaft und Menschennähe unvergleichlich reichen Lebens. Ein Band menschlicher und kulturhistorischer Dokumente erster Ordnung.

***** Zu beziehen durch alle Buchhandlungen. *****